

# LOGIKA

---

**Logika** – kořeny vycházejí ze zkušenosti

**Hádky**

**Pohádky** – vytvořené na polarizaci dobra a zla s etickou implikací

Stručný historický vývoj:

Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN Bratislava, 1990.

---

**SOFISTIKA** – vědomé používání chybné argumentace

Myš je slabika  
Myš sežrala sýr  
-----  
**SLABIKA SEŽRALA SÝR**

2 je sudé  
3 je liché  
-----  
**5 je sudé i liché, protože  
5 = 2 + 3**

Aristotelovská logika – intuitivní pojetí → MATEMATICKÁ LOGIKA

- Výroková logika
- Predikátová logika

**VÝROK** - základní pojem logiky

Výrokem nazveme každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé nebo nepravdivé

- Jedna a jedna se rovná pěti
- Praha je hlavní město České republiky.
- Maminka vyprala včera prádlo.

Výroky nejsou

- Zavři okno!
- Půjdeme do kina?
- Kočka je násobkem psiho ocasu. (nesrozumitelná oznamovací věta)

### NEGACE VÝROKU

Výrok – označíme  $q$

Negace: „**Není pravda, že  $q$** “

Negací se z nepravdivého výroku stane výrok pravdivý a naopak.

$p$ :  $6 > 2$

$p'$  = non  $p$  =  $\neg p$ :  $6 \leq 2$

---

**Jestliže se uvádí ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnovat všechny ostatní možnosti**

Počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů

Aspoň tři	... znamená 3 a více	<b>nejvýše dva</b>
Nejvýše tři	... znamená 0, 1, 2, 3 a ne více	<b>aspoň čtyři</b>
Právě tři	... znamená 3 a ne více a ne méně	<b>* 0,1,2 nebo 4 a více</b> <b>* Nevýše dva nebo aspoň 4</b>
Žádný	... znamená 0 a ne více	<b>* jeden a více</b> <b>* aspoň jeden</b>

Využít lze znalostí o nule a přirozených číslech a jejich znázornění na číselné ose.

Některé příklady výroků a jejich negací:

V: **Aspoň tři žáci měli vyznamenání**

V': **Nejvýše dva žáci měli vyznamenání**

V: **Nejvýše pět dní byla teplota pod bodem mrazu**

V': **Aspoň šest dní byla teplota pod bodem mrazu**

V: **Právě tři dny přelo**

V': **Nejvýše dva dny nebo alespoň čtyři dny přelo**

V: **Žádné dítě nemá kašel**

*Žádné dítě má kašel*

V': **Aspoň jedno dítě má kašel**

V: **Každé okno je zavřené**

V': **Aspoň jedno okno je otevřené**

---

**Někdo, kdosi** „přeložíme“ jako „**aspoň jeden**“

V: **Kdosi zatleskal**

*Aspoň jeden zatleskal*

V': **Žádný zatleskal**

*Žádný nezatleskal*

---

**Nejméně** „přeložíme“ jako „**aspoň**“

V: **Nejméně dva dny bude nemocný**

*Aspoň dva dny bude nemocný*

V': **Nejvýše jeden den bude nemocný**

---

**Bezmála** dle Slovníku spisovné češtiny „**skoro, málem, téměř**“  
„přeložíme“ jako: „**nejvýše**“

V: **Bezmála dvacet let zde stojí tato budova**

*Nejvýše dvacet let zde stojí tato budova*

V': **Aspoň dvacet jedna let zde stojí tato budova**

---

Kolik je „několik“ ...

V: **Na rybníku je několik kachen**

„přeložíme“ jako: *Na rybníku jsou aspoň dvě kachny*

V': **Na rybníku je nejvýše jedna kachna**

---

**Pravdivostní hodnota výroku: 0, 1 (negace výroku má opačnou pravdivostní hodnotu)**

Výše uvedené výroky – **ELEMENTÁRNÍ VÝROKY**

---

## **SLOŽENÉ VÝROKY**

Spojení alespoň dvou elementárních výroků

## **KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY**

- Predikát
- Kvantifikátor
  - Všeobecný ...  $\forall$
  - Existenční ...  $\exists, \exists!$

$\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x$

$\exists x, y \in \mathbf{R} : x > y$

## Složené výroky

A | Negace A

-----  
1 | 0  
0 | 1

**Konjunkce** (logické "a"): a/ a také/ a zároveň/ i /ale / přičemž

A | B | A a B

1 | 1 | 1  
1 | 0 | 0  
0 | 1 | 0  
0 | 0 | 0

**Disjunkce** (logické "nebo"): nebo /bud' ...nebo/případně/eventuálně

A | B | A nebo B

1 | 1 | 1  
1 | 0 | 1  
0 | 1 | 1  
0 | 0 | 0

**Ostrá disjunkce** (logické "nebo" ve smyslu vylučujícím ) - **ALTERNATIVA:**

A | B | A nebo B

1 | 1 | 0  
1 | 0 | 1  
0 | 1 | 1  
0 | 0 | 0

**Implikace:** když ... potom/je-li ... je /jestliže ... pak / když ... pak

A | B | A => B

1 | 1 | 1  
1 | 0 | 0  
0 | 1 | 1  
0 | 0 | 1

**Ekvivalence:** právě tehdy když / když a jen když /právě když

A | B | A <=> B

1 | 1 | 1  
1 | 0 | 0  
0 | 1 | 0  
0 | 0 | 1

**Další funktoary (používané v matematice i v jiných předmětech)**

Menší než – větší než – rovno např.  $3 < 5, 5 \geq 1,$

## Výroková formule

je zápis z písmen A, B, ... , znaku pro negaci, logických spojek a závorek, který je sestaven tak, aby byl výrokem, pokud písmena A, B, ... označují výroky.

Zápisy konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence jsou výrokovými formulami.

### Tautologie

je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty 1.

### Kontradixe

je výroková formule, která nabývá ve všech případech pravdivostní hodnoty 0.

### Splnitelná formule

je výroková formule, která nabývá pravdivostních hodnot 0, 1.

## Výroková forma $S(x)$

je slovní vyjádření, v němž se vyskytuje proměnná  $x$ . Toto vyjádření má tu vlastnost, že se stane výrokem, jestliže proměnnou nahradíme prvky jisté množiny, kterou označíme  $D$  a nazveme **definičním oborem** výrokové formy  $S(x)$ . Množinu všech prvků, pro něž je  $S(x)$  pravdivým výrokem, nazveme **oborem pravdivosti** výrokové formy  $S(x)$  a označíme  $P$ .

„ $x$  je celé číslo“ ... není výrok

- Dosadíme za  $x$  konkrétní číslo
- Kvantifikátory

## Operace s výrokovými formami

Podobně jako u výroků – užití negace, logických spojek a závorek – tvoříme nové výrokové formy

Jestliže  $U(x)$  a  $V(x)$  jsou dvě výrokové formy, zapisujeme nové výrokové formy ve tvaru:

- $\neg U(x)$ , tj. není pravda, že platí  $U(x)$ ,
- $U(x) \wedge V(x)$ , tj. platí  $U(x)$  a  $V(x)$ ,
- $U(x) \vee V(x)$ , tj. platí  $U(x)$  nebo  $V(x)$ ,
- $U(x) \Rightarrow V(x)$ , tj. jestliže platí  $U(x)$ , pak platí  $V(x)$ ,
- $U(x) \Leftrightarrow V(x)$ , tj.  $U(x)$  platí právě tehdy, když platí  $V(x)$ .

Z těchto výrokových forem můžeme vytvářet složitější výrokové formy.

Ne/rovnice - výroková forma

Ne/rovnost - výrok

## Negace složených výroků

<http://www.e-matematika.eu/index.php?kategorie=2&clanek=5>

Negací výroku	$A \wedge B$	je výrok	$\neg A \vee \neg B$ .
Negací výroku	$A \vee B$	je výrok	$\neg A \wedge \neg B$ .
Negací výroku	$A \Rightarrow B$	je výrok	$A \wedge \neg B$ .
Negací výroku	$A \Leftrightarrow B$	je výrok	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ .

## PŘÍKLADY

a) Přejde Alena a Barbora.

**negace: Nepřejde Alena nebo nepřejde Barbora.**

b) Přejde Cyril nebo David.

**negace: Nepřejde Cyril ani David.**

c) Jestliže přejde Eva, potom přejde i Hana.

**negace: Přejde Eva a nepřejde Hana.**

d) Jan přejde právě tehdy, když přejde Iva.

**negace: Přejde Jan a nepřejde Iva nebo přejde Iva a nepřejde Jan.**

e) Číslo 50 je dělitelné 15 a 5.

**negace: Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5.**

f) Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5.

**negace: Číslo 50 je dělitelné 15 a je dělitelné 5.**

g) Jestliže je poslední dvojčíslí daného přirozeného čísla dělitelné 4, potom je i dané číslo dělitelné 4.

**negace: Poslední dvojčíslí daného přirozeného čísla je dělitelné 4 a zároveň dané číslo není dělitelné 4.**

h) Číslo je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2

**negace: Číslo je dělitelné 6 a zároveň není dělitelné 2 a 3, nebo je dělitelné 2 a 3 a není dělitelné 6.**

Studijní opora:

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Matematika/05\\_MI\\_KAP%201\\_1.pdf](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Matematika/05_MI_KAP%201_1.pdf)