

TĚLESO RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Motivace zavedení

- Potřeba matematizovat nové problémy
- aby dělení bylo neomezeně proveditelné

postup rozšiřování množiny přirozených čísel



další zavedení (číslové zavedení)

$$\text{N} \rightarrow \text{Q}^+ \rightarrow \text{Q} \rightarrow \text{R}$$

KONSTRUKCE TĚLESA RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Doplňme oboru integrity všech celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
na $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ dělení bez omezení

Další požadované vlastnosti

- aby se počítalo dle stejných pravidel jako v $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- aby celá čísla byla i v \mathbb{Q} racionální
- aby se každé racionální číslo dalo vyjádřit pomocí čísel celých

Definice

Komutativní těleso $(Q, +, \cdot)$ nazýváme komutativním tělesem racionálních čísel právě tehdy, když platí

a) existuje podobor integrity $(Z^*, +, \cdot)$ komutativního tělesa $(Q, +, \cdot)$, který je izomorfní s oborem integrity $(Z, +, \cdot)$ všech celých čísel

b) každý prvek komutativního tělesa $(Q, +, \cdot)$ lze vyjádřit jako podíl dvou prvků z podoboru integrity $(Z^*, +, \cdot)$

Množina Q se nazývá množina racionálních čísel a její prvky racionální čísla.

Konstrukce

$M \subset Z \times Z$; prvky M ... uspořádání dvojice celých čísel (druhá složka $\neq 0$)

tyto uspořádání dvojice $[x, y]$ nazýváme **ZLOMKY**

zápis: $\frac{x}{y}$ x -čítatel, y -jmenovatel

$$\underline{M = \left\{ \frac{x}{y} \in Z \times Z ; y \neq 0 \right\}}$$

\mathbb{N} definujeme relací \approx

$$\approx = \left\{ \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right] \in \mathbb{N}^2; ad = bc \right\}$$

\approx je ekvivalence, vytvoří rozklad \mathbb{N} na třídy ekvivalentních zlomků

• Tředu A (racionální čísla) označíme uspořádanou dvojicí $[a, b]$

• Každý zlomek patří do racionálního čísla je reprezentantem racionálního čísla

$$\text{např. } A = [5, 3] = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{25}{15}, -\frac{15}{9}, \dots \right\}$$

Definice součtu a součinu rac. čísel A, B

Definice: Nechtě jsou dána racionální čísla A, B , která jsou reprezentována zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

SOUČTEM $A+B$ je racionální číslo reprezentované zlomkem $\frac{ad+bc}{bd} \in A+B$

stručně: je-li $\frac{a}{b} \in A, \frac{c}{d} \in B$, pak $\frac{ad+bc}{bd} \in A+B$

SOUČINEM $A \cdot B$ je racionální číslo reprezentované zlomkem $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in A \cdot B$

stručně: je-li $\frac{a}{b} \in A, \frac{c}{d} \in B$, pak $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in A \cdot B$

Součet ani součin nezávislí na volbě reprezentantů

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{14}{24} \left(\frac{7}{12} \right) \quad \dots \quad \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{-21}{-24} \right) = \frac{-84}{-144} \left(= \frac{84}{144} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \right)$$

VLASTNOSTI

NULLOVÝ PRVEK je racionální číslo $[0, x]$, $x \neq 0$
 $0 = \left\{ \frac{0}{x}, \frac{0}{y}, \dots \right\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \dots \right\}$

JEDNOTKOVÝ PRVEK je racionální číslo $[x, x]$, $x \neq 0$
 $1 = \left\{ \frac{x}{x}, \frac{1}{1}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2}{2}, \frac{-3}{-3}, \frac{7}{7}, \dots \right\}$

OPACNÉ ČÍSLO k číslu $[a, b]$ je číslo $[-a, b] = [a, -b]$
 $-A = \left\{ \frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}, \dots \right\}$

ROZDÍL ČÍSEL $[a, b]$, $[c, d]$ je číslo $[a, b] - [c, d] =$
 $= [a, b] + [-c, d] =$
 $= [ad - bc, bd]$

$$A - B = \left\{ \frac{ad - bc}{bd}, \dots \right\}$$

PŘEVRAŤENÉ ČÍSLO k číslu $[a, b]$, $a \neq 0$ je číslo $[b, a]$

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{b}{a}, \dots \right\}$$

PODÍL ČÍSEL $[a, b]$, $[c, d]$, $c \neq 0$ je číslo $[a, b] : [c, d]$

$$[a, b] : [c, d] = [ad, bc]$$

$$A : B = \left\{ \frac{ad}{bc}, \dots \right\}$$

205

Podobor integrity $(\mathbb{Z}^*, +, \cdot)$ komutativního tělesa $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, který je izomorfní s $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ existuje a unederná čísla mají tvar $[x \cdot n, x]$, $x \neq 0$ celé, n celé číslo.

Pro každé racion. číslo $[a, b]$ platí:

$$[a, b] = [x a, x] \cdot [y, y b] = [x a, x] : [y b, y]$$

DĚLENÍ JE NEOMEZENĚ PŘEVEDITELNÉ

ALGEBRAICKÁ STRUKTURA $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ JE KOMUTATIVNÍ TĚLESO

Reprezentace racion. čísla ZLOMKY

$$A = [a, b]$$

$\frac{a}{b} \in A \dots \frac{a}{b}$ je reprezentant čísla A

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru $\Leftrightarrow a, b$ nesoudělná

Důkaz:

$$\textcircled{1} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a}{b} = \frac{ah}{bh}, \text{ je-li } h \neq 0$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad c \neq 0$$

KLADNÁ A ZÁPORNÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA, USPORÁDÁNÍ TRČ

266

Definice

Racionální číslo r je kladné rae. číslo (\Leftrightarrow) buď $p > 0 \wedge q > 0$
nebo $p < 0 \wedge q < 0$, kde $\frac{p}{q} = r$

Platí: je-li $a, b \in \mathbb{Q}^+$ pak i $a + b \in \mathbb{Q}^+$
 $a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$

Definice

Racionální číslo r je záporným racionálním číslem
(\Leftrightarrow) $-r$ je kladným racion. číslem

Platí: a) r je racionální číslo, pak $\begin{cases} r \in \mathbb{Q}^+ \\ r \in \mathbb{Q}^- \\ r = 0 \end{cases}$

b) opačné číslo ke kladnému rae. číslu je záporné rae. číslo a naopak

Definice

Necht a, b jsou racionální čísla; a je menší než b
($a < b$) (\Leftrightarrow) rozdíl $b - a$ je kladné racionální číslo.

Platí: Necht a, b, c jsou rae. čísla. Pak

- je-li $a < b$, pak není $b < a$
- je-li $a < b$ a $b < c$ pak $a < c$
- je-li $a < b$, pak $a < b$ v $b < a$
- uplatí $a < a$

Relace $<$ je relace ostře lineárního uspořádání
na množině racionálních čísel \mathbb{Q}

Definice:

Říkáme, že lineárně uspořádaná množina (M, S) je hustě uspořádaná relací S právě když pro každé $a, b \in M$, $a <_S b$ existuje $c \in M$ tak, že $a <_S c <_S b$.

Platí: Množina racionálních čísel je relací lineárního uspořádání $<$ hustě uspořádaná.

ABSOLUTNÍ HODNOTA RACION. ČÍSLA . ČÍSELNÁ OSA

- definována stejně jako u celých čísel
- vlastnosti stejné

unic: $|a:b| = |a|:|b| \quad b \neq 0$

Značování racionálních čísel na číselné ose

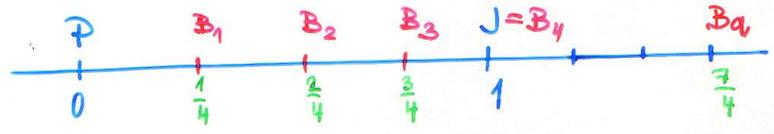
$$0 \dots P \in \mathbb{P}$$

$$1 \dots J \in \mathbb{P}$$

pak každému rac. číslu přiřadíme právě 1 bod na \mathbb{P}

- zobrazení prosté do:
 - a) číslu 0 přiřazen P
 - b) kladným rac. č. body $\mapsto PJ$ tak, že $r (r > 0)$
 $r = \frac{a}{b}$, a, b stejná znaménka ($a > 0, b > 0$)
 úseku PJ rozdělíme na b stejných dílů

$r = \frac{7}{4}$



c) záp. rac. číslo r ($-r$ je kladné!)

- sestavíme obraz $-r$
- stráždovná souměrnost podle $P \rightarrow$ obraz čísla r
 obrazy všech záporných racionálních čísel leží
 na polopřímce opačné k $\mapsto PJ$

p číselná osa
 $\rightarrow P$... kladná část
 spočítat $\rightarrow P$... záporná část } číselná osa

KONSTRUKCE TĚLESA REALNÝCH ČÍSEL $(R, +, \cdot)$

obtíživ! , nelze popsatými způsoby z čí Q

Definice:

Algebraickou strukturu $(R, +, \cdot)$ nazýváme tělesem reálných čísel, právě když má vlastnosti:

- ① $(R, +, \cdot)$ je komutativní těleso
- ② $(R, +, \cdot)$ obsahuje podtěleso $(Q^*, +, \cdot)$ izomorfní s tělesem racion. čísel $(Q, +, \cdot)$
- ③ R je hustě uspořádaná množina
- ④ R je spojité uspořádaná množina (nemá mezery)