Definice pravděpodobnosti, základní vlastnosti pravděpodobnosti

Úloha 1: Tahy koulí z osudí. Král Archibald III. se při příležitosti své korunovace rozhodl udělit milost některým na smrt odsouzeným vězňům. O jejich osudu rozhodne náhoda. V den popravy předstoupí každý z vězňů se zavázanýma očima před osudí, ve kterém je 7 bílých a 3 černé koule a vytáhne dvě z nich. Budou-li tažené koule stejné barvy, bude mu udělena milost, v opačném případě bude popraven. Určete pravděpodobnost, že bude vězni udělena milost a také pravděpodobnost, že bude popraven.

Řešení:

a) *Variace.* Představme si, že koule v osudí budou očíslovány a že například koule s čísly $1, 2, \dots, 7$ budou bílé a koule s čísly $8, 9, 10$ bodou černé. Výsledky náhodného pokusu „tahu dvou koulí z osudí" budeme zapisovat pomocí uspořádaných dvojic čísel (na pořadí čísel *záleží*). Například zápis $(9, 5)$ značí, že první tažená koule má číslo 9 (je černá) a druhá tažená koule má číslo 5 (je bílá). Počet všech možných tahů je v tomto případě roven $10 \cdot 9 = 90$, neboť první taženou kouli vybíráme z 10 koulí, zatímco druhou již jen z 9 koulí (první taženou kouli do osudí nevracíme). Vyjádřeno kombinatoricky, určili jsme počet 2-členných variací z 10 prvků

$$V(2, 10) = \frac{10!}{8!} = 90.$$

Označme me nyní A jev „obě tažené koule mají stejnou barvu". Tomuto jevu jsou příznivé tahy, ve kterých jsou obě koule bílé a také tahy, ve kterých jsou obě koule černé. Počet tahů, ve kterých jsou obě koule bílé je roven $7 \cdot 6 = 42$, neboť má-li být první tažená koule bílá, musíme ji vybrat ze 7 koulí s čísly $1, 2, \dots, 7$ (ty jsou bílé) a má-li být i druhá tažená koule bílá, musíme ji vybrat ze zbývajících 6 bílých koulí. Podobně určíme, že počet tahů, ve kterých jsou obě koule černé je roven $3 \cdot 2 = 6$. Celkem tedy máme 48 tahů, ve kterých mají obě tažené koule stejnou barvu. Nyní již snadno vyjádříme hledanou pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \doteq 0{,}533.$$

b) *Kombinace.* Koule v osudí opět očíslujeme stejně jako v předchozím řešení. Jednotlivé možné tahy dvou koulí z osudí budeme tentokrát zapisovat jako dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$. Například zápis $\{5, 9\}$ značí, že byly taženy koule s čísly 5 a 9. Přitom tato čísla mohla být tažena v pořadí 5, 9 nebo 9, 5 (na pořadí čísel *nezáleží*). Počet všech možných takto zapsaných tahů je $90/2$, neboť každé množině $\{a, b\}$, odpovídají dvě uspořádané dvojice (a, b), (b, a), které jsme uvažovali v předchozím řešení. Vyjádřeno kombinatoricky, určili jsme počet 2-členných kombinací z 10 prvků

$$K(2, 10) = \binom{10}{2} = 45.$$

Podobně určíme počet tahů, ve kterých mají obě koule bílou barvu. Ten je roven počtu dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 7\}$, kterých je $\binom{7}{2} = 21$. Počet tahů, ve kterých mají obě koule černou barvu je ze stejného důvodu roven $\binom{3}{2} = 3$. Celkem tedy máme 24 dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$, které odpovídají tahům, ve kterých mají obě tažené koule stejnou barvu. Pro hledanou pravděpodobnost tedy platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \doteq 0{,}533.$$

△

Úloha 2: Spravedlivé rozdělení sázky. Adam a Břetislav hrají sérii her o nějakou částku. Tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje 6 her. Adam i Břetislav jsou stejně dobří a v každé jednotlivé hře mají oba stejnou šanci zvítězit. Série her je předčasně ukončena za stavu 5 : 3 pro Adama. Jak má být za tohoto stavu spravedlivě rozdělena sázka mezi oba hráče?

Řešení:

Nejprve se pokusíme vyjádřit množinu Ω všech možných průběhů série her, začínající za stavu 5 : 3 a končící celkovým vítězstvím některého z hráčů. Označme vítězství Adama v jedné hře číslem 0 a vítězství Břetislava v jedné hře číslem 1. Jednotlivé série budeme zapisovat jako posloupnosti čísel 0 a 1. Například zápis $(1,1,0)$ značí sérii her, kde v prvních dvou hrách zvítězil Břetislav a ve třetí hře zvítězil Adam a celá série tak zkončila za stavu $6:5$ vítězstvím Adama. Nyní již vypíšeme všechny možné průběhy série her

$$\Omega = \{(0),\ (1,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

Pokud bychom nyní bez přemýšlení prohlásili, že k celkovému vítězství Adama vedou tři průběhy série her a k vítězství Břetislava jediný průběh série her a tedy spravedlivé rozdělení částky je v poměru $3:1$ pro Adama, dopustili bychom se závažného omylu. Jednotlivé průběhy série her, prvky množiny Ω, totiž nejsou stejně pravděpodobné. Již při řešení úlohy simulací jsme si mohli všimnout, že série her končí mnohem častěji například za stavu $6:5$, který odpovídá průběhu (0), než za stavu $5:6$, který odpovídá průběhu $(1,1,1)$. Průběh (0) můžeme chápat jako jev „při jednom hodu mincí padne líc“, jehož pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$. Naproti tomu průběh $(1,1,1)$ můžeme chápat jako jev „při třech hodech mincí padnou tři ruby“. Jistě snadno určíte, že pravděpodobnost tohoto jevu je $\frac{1}{8}$.

Pokusíme se vyjádřit jednotlivé průběhy serie her tak, aby byly stejně pravděpodobné. Představme si, že začneme hrát za stavu $5:3$ a odehrajeme v každém případě tři hry bez ohledu na to, že celkový vítěz bude často znám o něco dříve. Množinu Ω všech možných průběhů série her potom můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\\ &(1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že nyní jsou jednotlivé průběhy série her stejně pravděpodobné. Pro názornost si můžeme představit, že stejně bychom zapsali množinu Ω všech možných výsledků hodů třemi mincemi.

Nyní již snadno určíme pravděpodobnosti zisku částky pro jednotlivé hráče. Označme A jev „částku získá Adam“ a B jev „částku získá Břetislav“. Jevu B je příznivý jediný průběh série her $(1,1,1)$, naproti tomu jevu A je příznivých sedm zbývajících průběhů. Můžeme vyjádřit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{8}, \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}.$$

Spravedlivé je rozdělení částky v poměru $7:1$ ve prospěch Adama, neboť ve stejném poměru jsou i pravděpodobnosti zisku částky pro jednotlivé hráče.

△

Úloha 3: Pokuste se nalézt obecné řešení úlohy o rozdělení sázky pro dva hráče, tj. vyjádřete v jakém poměru by měla být spravedlivě rozdělena sázka v případě, že do celkového vítězství chybí Adamovi m výher a Břetislavovi n výher.

Řešení:

Do dokončení celé série chybí nejvýše $m+n-1$ her. Částku získá Adam, jestliže Břetislav vyhraje nejvýše $n-1$ her. Částku získá Břetislav, jestliže Adam vyhraje nejvýše $m-1$ her. Z celkového počtu $m+n-1$ her lze vyhrát (tj. vybrat) k her celkem $\binom{m+n-1}{k}$ způsoby. Poměr šancí na zisk částky mezi Adamem a Břetislavem je tedy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j}$$

a ve stejném by tedy měla být částka rozdělena.

Poznámka: Jestli vám není moc jasné, jak vzorec vznikl, zkuste si úlohu modelovat jako náhodnou procházku po čtvercové síti tvořené m krát n čtverci. Vyjdete z levého dolního rohu sítě a při každé výhře Adama se posouváte o jeden dílek vpravo, zatímco při každé výhře Břetislava se posouváte o jeden dílek nahoru. Podle toho kterou stranu obdélníku (horní nebo pravou) protne trajektorie vašeho pohybu dříve, získá částku Adam nebo Břetislav. Nyní již jen stačí určit počty trajektorií protínajících nejdříve horní, resp. nejdříve pravou stranu obdélníku.

△

Úloha 4: Soutěž o vstupenky na koncert. V rámci televizní hitparády byla pro diváky vyhlášena vědomostní soutěž. Její vítězka Lucka se nyní nachází ve studiu před košem s 10 obálkami. V 5 obálkách jsou vstupenky na koncert její oblíbené skupiny a 5 obálek je prázdných. Lucka může z koše vytáhnout 5 obálek a ponechat si jejich případný obsah. Nechce ale jít na koncert sama, moc by si přála získat aspoň 3 vstupenky, pro sebe i pro své dvě kamarádky. Jaká je pravděpodobnost, že Lucka svého cíle dosáhne?

Řešení:

Představme si, že jednotlivé obálky jsou označeny čísly[1] $1, 2, \ldots, 10$, přičemž obálky s čísly 1 až 5 obsahují vstupenky na koncert a obálky s čísly 6 až 10 jsou prázdné. Lucka náhodně vybírá (bez vracení) 5 z 10 takto očíslovaných obálek. Výsledky Luccina tahu můžeme zapisovat jako 5 prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$, neboť na pořadí tažených čísel nezáleží. Například zápis $\{1, 5, 6, 8, 9\}$ značí tah vedoucí k zisku 2 vstupenek. Počet všech možných takto zapisovaných výsledků náhodného pokusu je roven počtu 5-členných kombinací z 10 prvků a tedy

$$|\Omega| = \binom{10}{5}.$$

Označme A jev „Lucka získá aspoň 3 vstupenky“. Tomuto jevu jsou příznivé tahy, při kterých Lucka získala 3, 4 nebo 5 vstupenek. Tahy vedoucí k zisku 3 vstupenek jsou zapsány 5 prvkovými podmnožinami, jejichž 3 prvky patří do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a 2 prvky do množiny $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Jejich počet je $\binom{5}{3}\binom{5}{2}$. Obdobně určíme, že počet tahů vedoucích k zisku 4 vstupenek je $\binom{5}{4}\binom{5}{1}$ a počet tahů vedoucích k zisku 5 vstupenek je $\binom{5}{5}\binom{5}{0}$. Nyní již můžeme vyjádřit hledanou pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{2} + \binom{5}{4}\binom{5}{1} + \binom{5}{5}\binom{5}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{100 + 25 + 1}{252} = \frac{1}{2}.$$

Pravděpodobnost, že Lucka dosáhne svého cíle je stejná jako pravděpodobnost, že jej nedosáhne. △

Úloha 5: Hrajeme Poker. V Pokeru se hraje s balíčkem 52 karet, ze kterého obdrží každý hráč při rozdávání 5 karet. Pokud je možné tyto karty seřadit do posloupnosti karet s po sobě jdoucími bodovými hodnotami, přičemž na barvě karet nezáleží, řekneme, že hráč obdržel postupku. Jaká je pravděpodobnost, že hráč při rozdávání obdrží postupku?

Řešení:

Představme si, že jednotlivé karty v balíčku označíme čísly 0 až 51 podobně jako při řešení této úlohy simulací. Karty, které obdrží hráč při rozdávání, můžeme zapisovat jako 5 prvkové podmnožiny množiny $\{0, 2, \ldots, 51\}$, neboť na pořadí tažených čísel nezáleží. Počet všech možných takto zapisovaných výsledků náhodného pokusu – rozdávání karet je roven počtu 5-členných kombinací z 52 prvků a tedy

$$|\Omega| = \binom{52}{5}.$$

Označme A jev „karty, které obdrží jeden hráč při rozdávání tvoří postupku“. Máme určit počet výsledků příznivých tomuto jevu. Zabývejme se nejprve jednodušší úlohou určit počet výsledků rozdávání, při kterých hráč obdrží postupku typu *A, 2, 3, 4, 5*. Ten je roven $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$, neboť první kartou v postupce může být libovolné ze 4 es a dalšími kartami v postupce mohou být postupně libovolé ze 4 dvojek, trojek, čtyřek a pětek. Podobně, počet výsledků rozdávání, při kterých hráč obdrží postupku typu *2, 3, 4, 5, 6* je 4^5. Nejvyšší možnou postupkou je *10, J, Q, K, A*, kterou hráč může obdržet také 4^5 způsoby. Celkem máme $10 \cdot 4^5$ výsledků, při kterých hráč obdrží některou z postupek. Pro hledanou pravděpodobnost tedy platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{10\,240}{2\,598\,960} \doteq 0{,}003\,94.$$

△

[1] Čísla jsou samozřejmě zapsána uvnitř obálek tak, aby při tahu nemohla být spatřena.

Úloha 6: Sázíme sportku. Určete pravděpodobnost výhry ve sportce v V. pořadí. Připomeňme, že výhru v V. pořadí získáme, pokud se nám podaří uhodnout libovolná tři čísla ze šesti tažených.

Řešení:

Při tahu sportky tvoří množinu Ω všechny šestice navzájem různých čísel vybraných z čísel $1, 2, \ldots, 49$. Jejich počet snadno určíme, když si představíme, jak tah sportky probíhá. Po spuštění losování jsou míčky v osudí promíchávány silným proudem vzduchu. V horní části osudí se nachází malý otvor, do kterého čas od času pronikne některý z míčků a zastaví se na konci průhledné trubice. Ve chvíli, kdy se do trubice dostane sedmý míček (určující tzv. dodatkové číslo), je losování ukončeno. V naší úloze se míčkem určujícím dodatkové číslo nebudeme zabývat, bude nás zajímat pouze prvních šest míčků, které se objeví v trubici. Jako první se v trubici může objevit libovolný ze 49 míčků. V té době je v osudí již jen 48 míčků a proto je 48 možností na obsazení druhého místa v trubici. Podobně je 47 možností na obsazení třetího místa v trubici. Celkem je možno všech šest míst v trubici obsadit

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!}$$

způsoby. Čísla tažená ve sportce se před zveřejněním ještě seřadí podle velikosti od nejmenšího k největšímu, neboť nezáleží na pořadí tažených čísel. Jestliže v denním tisku nalezneme informaci, že byla tažena například čísla $5, 14, 18, 23, 37, 41$, znamená to že v trubici mohla být libovolná permutace těchto čísel. Počet těchto permutací je $6! = 720$. Mezi všemi možnými $\frac{49!}{43!}$ šesticemi čísel, které se mohou objevit v trubici proto nalezne $6!$ permutací každého tahu. Skutečný počet možných tahů sportky je tedy

$$|\Omega| = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \binom{49}{6}.$$

Kombinatoricky vyjádřeno tvoří množinu Ω šestičlenné kombinace ze 49 prvků, neboť vybíráme 6 prvků ze 49 a na pořadí vybraných prvků nezáleží.

Nechť nyní jev A značí „uhodneme libovolná 3 čísla ze šesti tažených“. Pokusíme se vyjádřit počet tahů z množiny Ω příznivých jevu A. Představme si, že si vsadíme například čísla $5, 14, 18, 23, 37, 41$. Tahy vedoucí k naší výhře v V. pořadí musí obsahovat právě 3 ze vsazených čísel a právě tři ze zbývajících 43 čísel, která jsme nevsadili. Tři čísla můžeme ze šesti vsazených vybrat $\binom{6}{3}$ způsoby, jedná se o tříčlenné kombinace ze šesti prvků $5, 14, 18, 23, 37, 41$. Další tři čísla můžeme ze 43 zbývajících čísel vybrat $\binom{43}{3}$ způsoby. Celkový počet tahů z množiny Ω, které vedou k výhře v V. pořadí je tedy

$$|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3},$$

neboť ke každé trojici čísel, která vyhrává můžeme vybrat $\binom{43}{3}$ trojic čísel, která k výhře nevedou.

Nyní již snadno vyjádříme pravděpodobnost jevu A

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}017\,65.$$

△