KOMBINATORIKA

jak ji možná neznáme

doc.RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

KMD FP TUL v Liberci

jana.prihonska@tul.cz

Kombinatorika

Úvod

Kombinatorika hraje v rozvoji matematického myšlení výraznou roli. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení a obecných kombinačních schopností, v neposlední řadě ji lze považovat za základ pro následné řešení různých *pravděpodobnostních problémů*.

Je učivem hlavně středních škol, kde se omezuje na klasickou problematiku vytváření skupin předmětů a určování počtů všech skupin, které splňují určité podmínky. Na základní škole se s ní setkávají pouze žáci navštěvující školy s rozšířenou výukou matematiky.

Různé kombinatorické úlohy se vyskytují často v *matematických olympiádách* a dalších *soutěžích*.

Na druhém stupni nespecializovaných základních škol se kombinatorické úlohy řeší také, ale pouze intuitivně, úsudkem nebo dosazováním hodnot bez použití vzorců a obecných kombinatorických pravidel.

Co je to vlastně kombinatorika?

Kombinatorika je část matematiky, která se (jak je z názvu jasné) zabývá kombinováním všeho možného, např. můžeme při sportovním turnaji kombinovat družstva, můžeme je přiřazovat do různých skupin atd.

Vznik kombinatoriky asi nelze přesně zařadit do nějakého historického období. Vyvíjela se průběžně s potřebou člověka, který chtěl znát odpovědi na svoje nejrůznější otázky, které se týkaly tohoto tématu. Kombinatorika na rozdíl od mnohých jiných částí matematiky nepochází z Řecka. První zmínky o úlohách z kombinatoriky nacházíme v Indii.

Například v lékařském spise Susruta se jeho čtenáři už v 6. století před n. l. mohli dočíst, že šesti různými základními příchutěmi se dá dosáhnout celkem 63 chutí.

První kniha

Pak přišla mystická židovská kniha s hebrejským názvem Sefer Yetzirah. Ta tvrdila: „*Ze dvou kamenů postavíš dva domy, ze třech kamenů postavíš šest domů, … atd.*“ Její autor tedy už ve 3. století našeho letopočtu nehovoří o ničem jiném, než o *faktoriálech*.
Mnozí další autoři židovského a islámského světa se zabývali hlavně úlohami o počtu slov, které je možné sestavit z daného počtu písmen v abecedě, stále jim však chyběla zobecnění. Až Abraham ibn Ezra (1090 – 1167), rabín žijící ve Francii, se na to zřejmě nemohl dívat, a tak pozorováním hvězd podrobně odvodil pravidlo na výpočet k-prvkových kombinací ze 7 prvků. Udělal to proto, že ho zajímal počet všech možných konjunkcí sedmi planet, které v té době podle něho pozoroval.
Od 13. století se už v mnohých pracích objevují i kombinatorické důkazy a matematici odvozují vztahy daleko složitější, než běžně používáme. [2]

Výsledky úloh v tomto období autoři nacházejí vypsáním všech možností, takže nevíme, zda znali i nějaké všeobecné vzorce. Ty už ale můžeme předpokládat u Varahamihira, který, chystajíc se vyrábět parfémy, uvažoval, že vždy když smíchá 4 ze 16 základních ingrediencí, tak dostane 1820 nadějných voňavek, což zřejmě nemohl zjistit

vypisováním všech možností.

Kombinatorika v hrách

Jako matematická disciplína se kombinatorika začala objevovat přibližně v 17. století. O její rozvoj se kromě jiných zasloužili

Pascal, Fermat, Bernoulli, Leibniz, Euler či Laplace.

Předmětem jejich zkoumání byly *hazardní hry*. Velký význam měla úloha o rozdělení sázky, kterou Pascalovi předložil jeho přítel, vášnivý hráč, Chevalier de Méré. Šlo o „*Zápas“ hlava – orel*, který se hraje do 6 vyhraných partií. Problém vznikl, když musel být přerušen v době, kdy jeden hráč měl 5 a druhý 4 vyhrané partie. Jak tedy rozdělit vsazené peníze? Bylo jasné, že rozdělení v poměru 5:4 by nebylo spravedlivé. Pascal použil metody kombinatoriky a řešil tento problém v obecném případě, kdy jednomu hráči zbývá ještě vyhrát *r* partií a druhému *s* partií. Touto úlohou se zabýval i Pierre Fermat, ale ten došel k jinému řešení.

Další rozvoj kombinatoriky je spojen se jmény

Jakob Bernoulli, G. W. Leibniz a Leonhard Euler.

I u nich byly hlavními aplikace na různé hry

(loto, pasiáns atd.).

V západních kulturách ji matematici objevili též v souvislosti s

***hazardními hrami*.**

Tehdy v životě privilegovaných vrstev společnosti zaujímaly hazardní hry význačné místo.

V kartách a kostkách se vyhrávaly a prohrávaly brilianty, zlato, paláce a statky, koně i drahé šperky. Také byly rozšířeny rozmanité loterie.

Proto se kombinatorické úlohy zpočátku týkaly především těchto her.

Řešily se například problémy kolika způsoby může při daném počtu vržených kostek padnout určitý počet ok, nebo kolika způsoby lze získat dva krále v jisté karetní hře. Tyto problémy byly hybnou silou v rozvoji nejen kombinatoriky, ale také teorie pravděpodobnosti, které se rozvíjely souběžně.

Jak řešit kombinatorické problémy?

P2 *Karolína dostala od kamarádek 5 různých obrázků (viz Obr. P2). Chce si je pověsit na stěnu vedle sebe. Přemýšlí, jak obrázky uspořádat. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, jestliže největší má viset uprostřed?*

Obr. P2 Obrázky

1. řešení

Vypíšeme všechny možnosti. Obrázky si očíslujeme od 1 do 5. Prostřední obrázek musí být největší (Obr. P2a):

Obr. P2a Očíslované obrázky

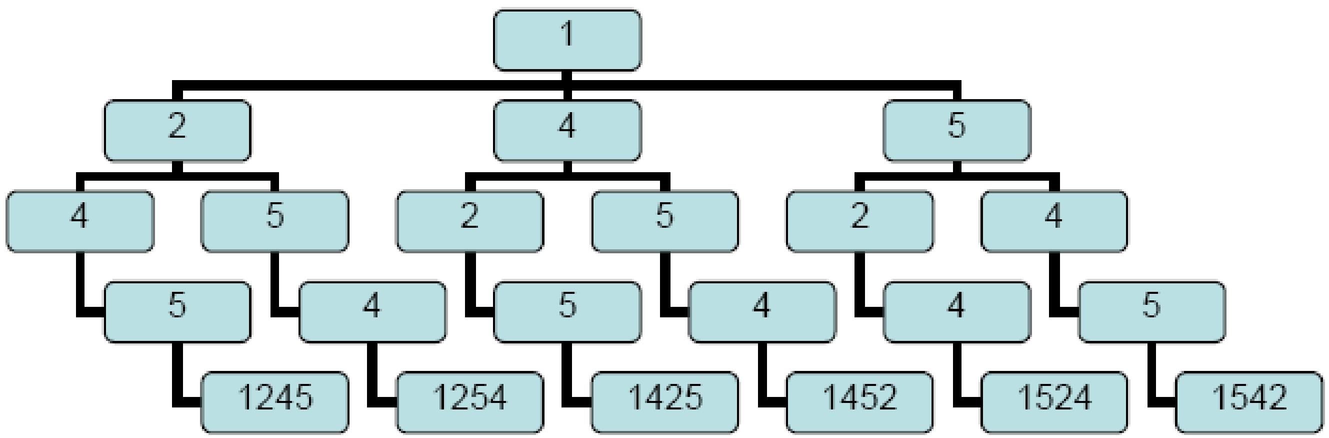
Na první místo si zvolíme jeden z obrázků, zbylé tři obrázky vzájemně prohazujeme. Z prostředním obrázkem **3** nehýbeme, stojí stále na stejném místě. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možnosti. Počet možností v každém sloupci odpovídá počtu permutací bez opakování ze tří prvků.

Tab. P2 Řazení obrázků

12345	21345	41325	51324
12354	21354	41352	51342
14325	24315	42315	52314
14352	24351	42351	52341
15324	25314	45312	54312
15342	25341	45321	54321

2. řešení - *logický strom*

Využijeme očíslování dle Obr. P2a). Třetí obrázek bude stále na stejném místě, proto ho nebudeme vypisovat a vypíšeme pouze krajní možnosti.



Obr. P2b Logický strom

Vzájemným prohozením 1 a 2, dostaneme dalších 6 možností. To samé uděláme pro 1 a 4, 1 a 5; celkem tedy existuje 6 + 6 + 6 + 6 = 24 možností.

<u>3. řešení</u> - ***permutace bez opakování***

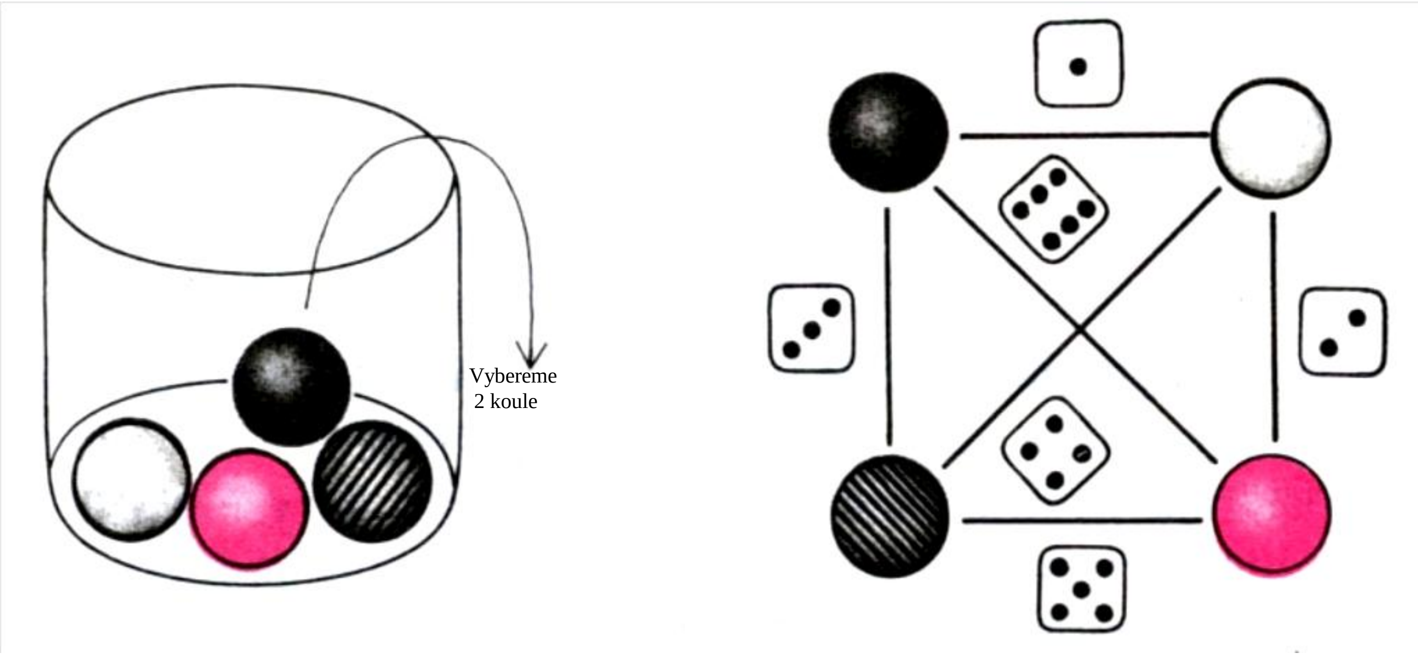
Jedná se o různé uspořádání 4 prvků (obrázky **1**, **2**, **4**, **5**) neboli o permutaci ze čtyř prvků bez opakování:

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Využití grafického znázornění

Problém 1

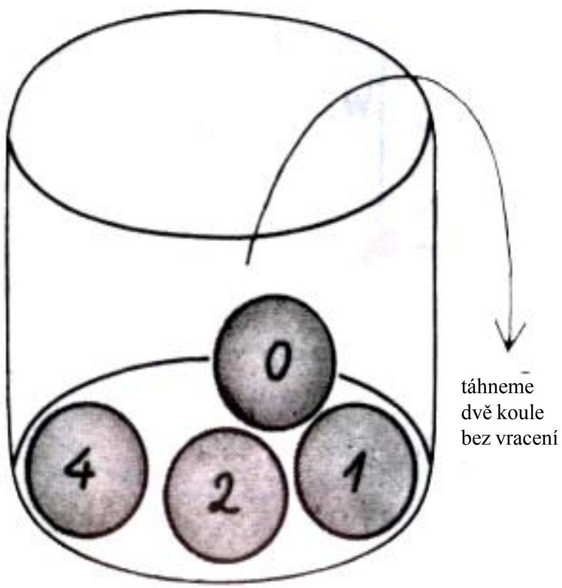
Klasická hrací kostka má pravidelný tvar krychle, na každé stěně je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Představme si, že kostku ztratíme a potřebujeme simulovat hod kostkou pomocí 4 koulí různé barvy. Koule umístíme do urny a táhneme 2 z nich. Tažené koule nevracíme zpět.

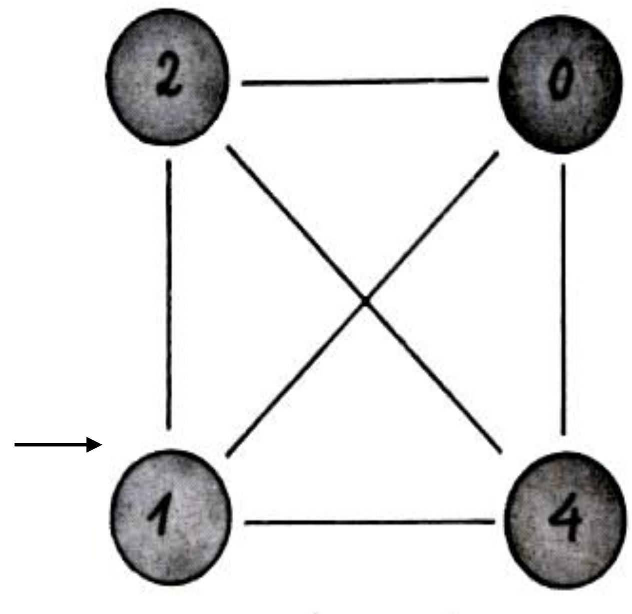


Plocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nás - počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem 2001.

Problém 2

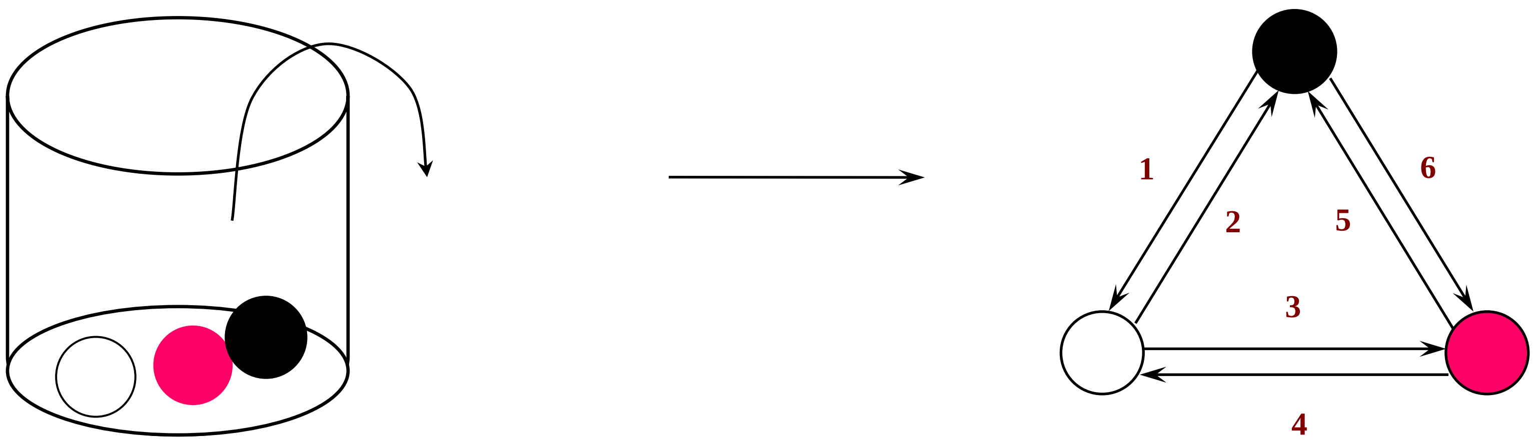
Máme k dispozici 4 stejné koule. Jak je možné nyní simulovat hod kostkou?





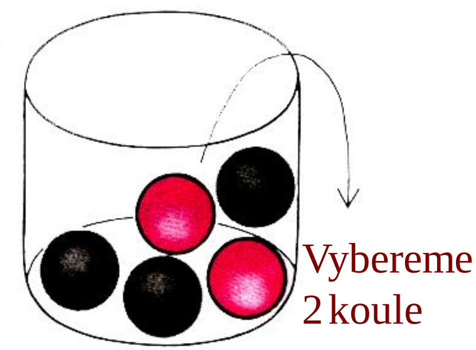
Problém 3

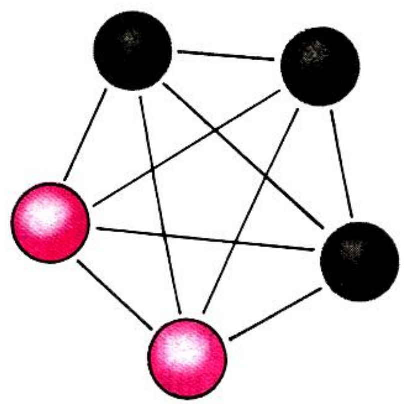
K dispozici máme 3 koule různé barvy. Jak nyní můžeme simulovat hod kostkou?

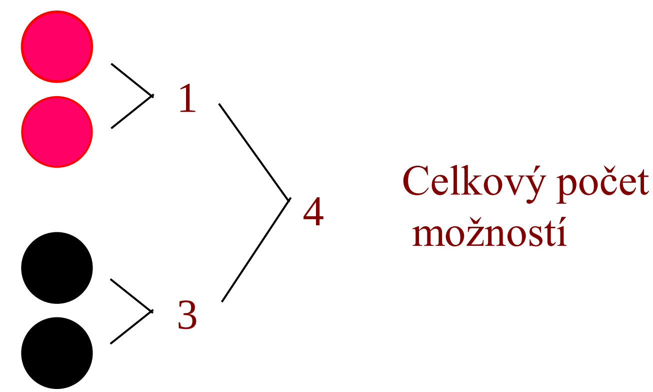


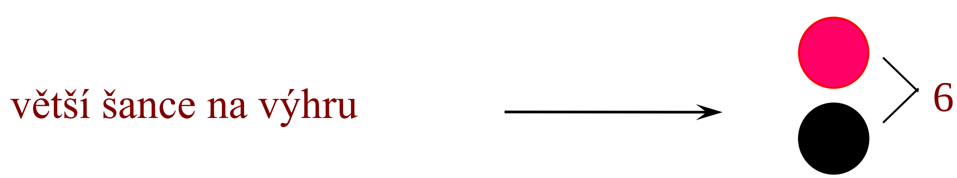
Problém 4

V urně jsou 3 černé a 2 červené koule. Vytáhneme 2 koule (tažené koule nevracíme do urny):Petr (P) vyhrává, jsou-li obě tažené koule stejné barvy, Milan (M) vyhrává, jsou-li obě tažené koule různé barvy.



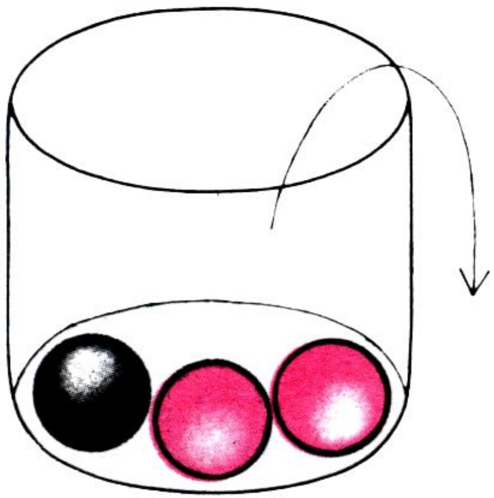




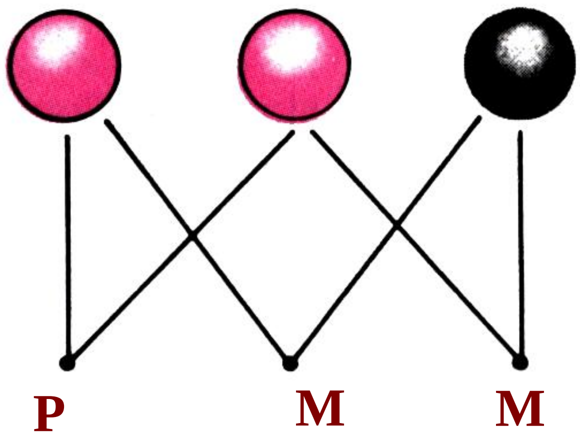


Problém 5:

V urně jsou 2 červené a 1 černá koule. Podmínky výhry pro Petra a Milana jsou stejné jako v předchozím problému. Který z hochů má větší šanci vyhrát?

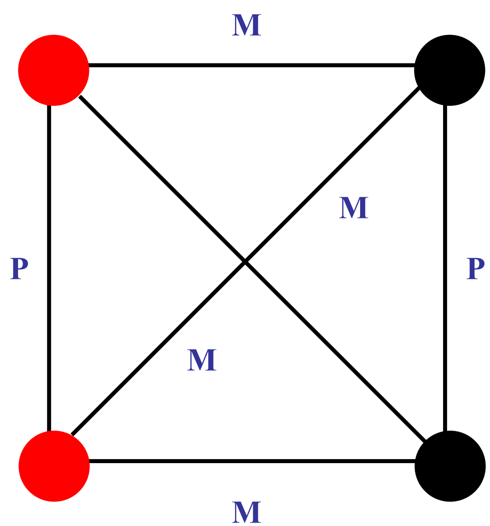


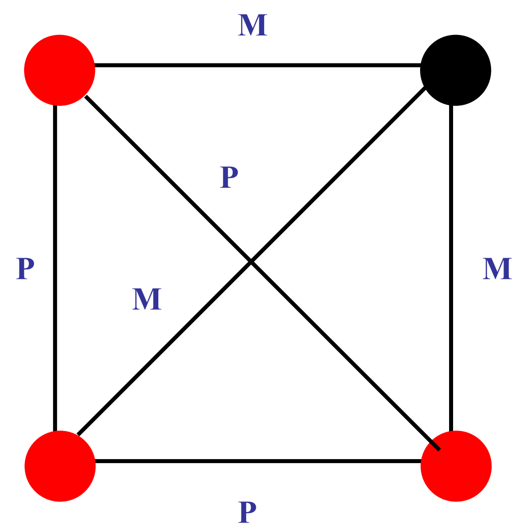
táhneme 2 koule
bez vracení



Problém 6

Jakou kouli musíme přidat do urny, aby hra byla spravedlivá?





M … 4 možnosti
P … 3 možnosti

Nespravedlivá hra

(větší šanci má Milan)

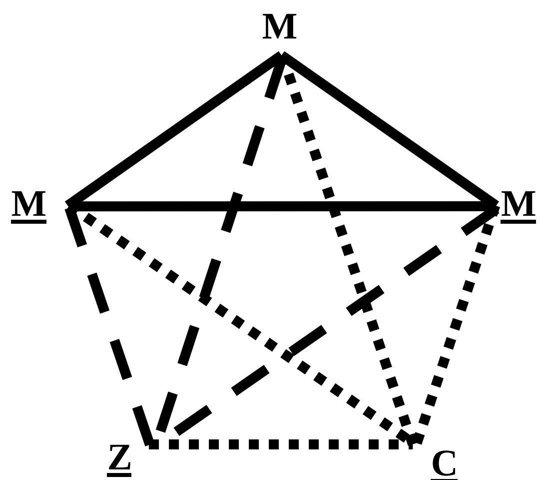
M… 2 možnosti
P… 3 možnosti

Spravedlivá hra

(šance na výhru jsou stejné)

Problém 7

Do krabičky dáme 3 modré (vzájemně tyto kuličky nerozlišujeme), jednu zelenou a jednu červenou kuličku. Zamícháme a vytáhneme dvě kuličky, nevracíme je zpět do krabičky a nedíváme se, jakou barvu mají). **Jaký výběr je více pravděpodobný – dvě stejné či různé barvy?**



Obr.: Grafické znázornění výběrů kuliček

Řešení:

M - modrá kulička
Z   - zelená kulička
C   - červená kulička

MM   -   3 možnosti

MC   - 3 možnosti
MZ   - 3 možnosti ***7 možností***
ZC   -   1 možnost

Odpověď:

Výběr dvou kuliček různé barvy je více pravděpodobný. Existuje celkem 10 možností pro výběr dvou kuliček.

Úlohy se sportovní tématikou

Počty odehraných zápasů

- **Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?**
- **Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?**

Možné průběhy zápasu

- **Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít?**

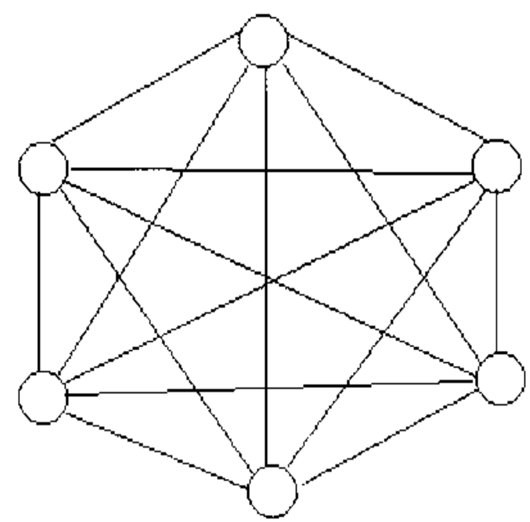
Problém 8

Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Řešení:

Jde o vytvoření úplného neorientovaného grafu na šesti uzlech, jak ukazuje obrázek – počet hran je 15. Při výpočtu je možné využít kombinačních čísel :

$$\binom{6}{2} = 15$$

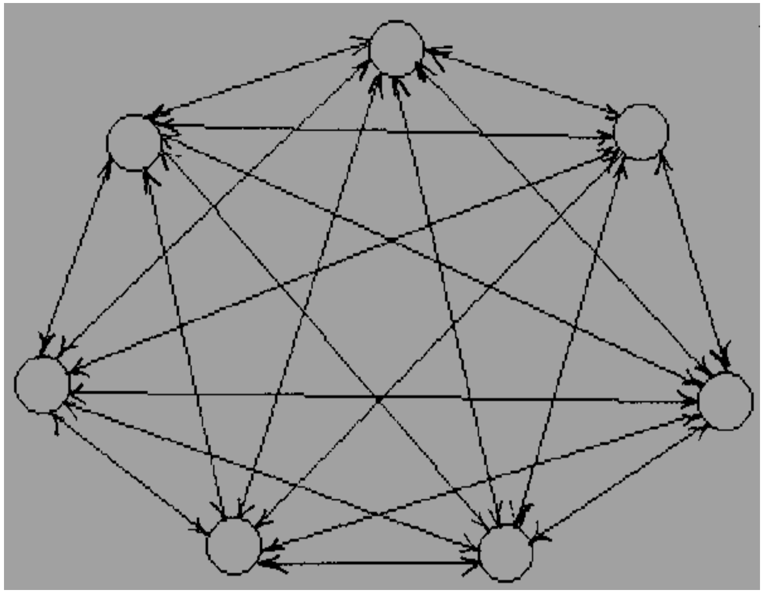


Problém 9

Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?

Řešení:

Jedná se o vytvoření úplného orientovaného grafu. Vzhledem k podmínkám úlohy jsou šipky obousměrné. Celkový počet zápasů je dvojnásobný , tj. 42.



C2 *Na fotbalovém turnaji devátých tříd se setkalo 8 mužstev. Každé mužstvo hrálo s každým mužstvem 1 zápas. Kolik zápasů se v tomto turnaji odehrálo?*

1. řešení ***- tabulkové schéma***

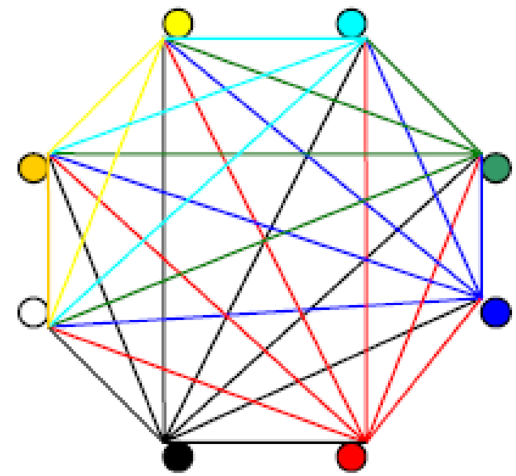
Vypíšeme všechny zápasy pomocí tabulky. Mužstva si pojmenujeme podle jmen kapitánů: **P**ETR - **P**, **H**ONZA - **H**, **M**IREK - **M**, **J**AKUB - **J**, **V**AŠEK - **V** , **L**IBOR - **L**, **D**AN - **D**, **K**AREL - **K**

	P	H	M	J	V	D	K
P		P – H	P – M	P – J	P - V	P – D	P – K
H			H – M	H – J	H - V	H – D	H – K
M				M – J	M - V	M – D	M – K
J					J - V	J – D	J – K
V						V – D	V - K
D							D - K
K							

Tab. C2 Mužstva

<u>2. řešení</u> - *grafické řešení* (viz úloha C1 - 2. řešení)

Uzly grafu (barevné puntíky) značí mužstva a spojnice jednotlivé zápasy. Každý musí hrát s každým, a proto z každého uzlu grafu musí směřovat spojnice ke všem ostatním.



Obr. C2 Mužstva

➤ ***Poznámka:***

V případě většího počtu prvků - uzlů v grafu - se graf a tím i řešení stává nepřehledným a je lepší zvolit jinou metodu řešení. ➤

<u>3. řešení</u> – *kombinace bez opakování*

Jedná se 2- prvkovou podmnožinu dané 8-prvkové množiny, na pořadí prvků nezáleží a žádný se v ní neopakuje.

$$C_2(8) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Problém 10 Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky* 2. SPN, Bratislava 1990.

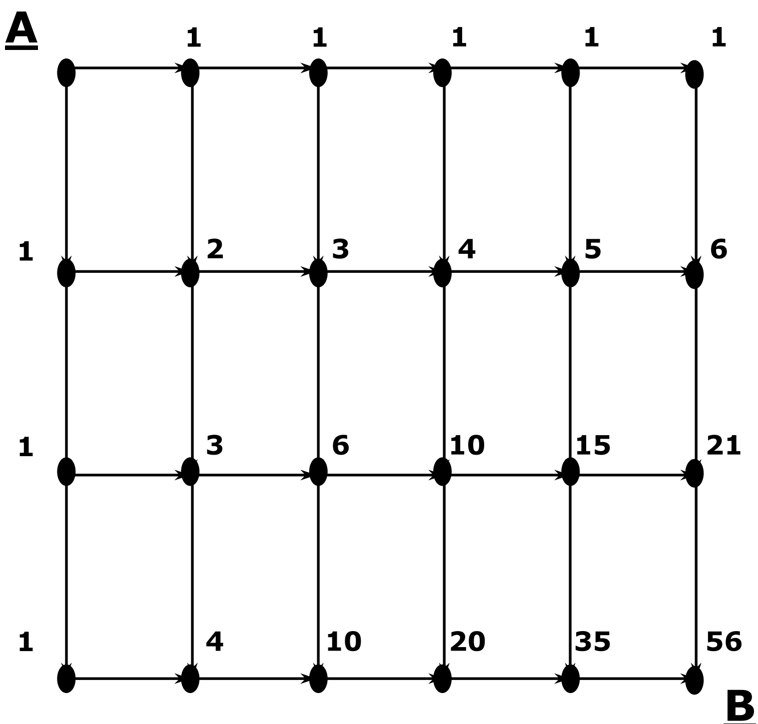
Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít?

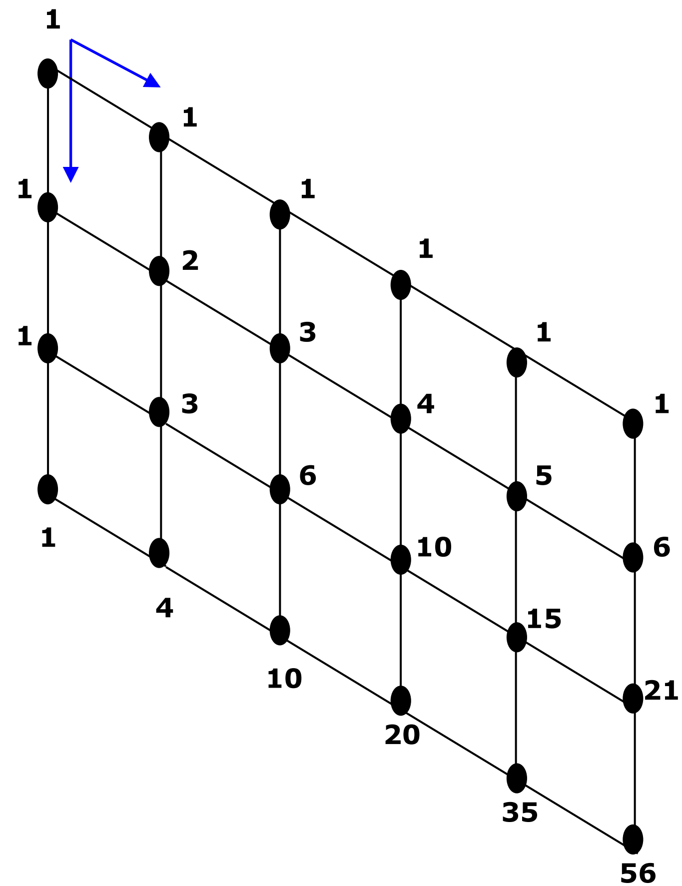
1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0	5 : 0
1 : 1	2 : 1	3 : 1	4 : 1	5 : 1
1 : 2	2 : 2	3 : 2	4 : 2	5 : 2
1 : 3	2 : 3	3 : 3	4 : 3	5 : 3

Řešení:

A … výchozí uzel (stav 0 :0)

B … cílový uzel (stav 5 : 3)





Graf s *h*-diagramem

BLUDIŠTĚ

V literatuře najdeme velké množství úloh s názvem „bludiště“. Bludiště lze klasifikovat:

- ***barevná bludiště***, s „turistickými“ cestami, pravidla vymezují roli barev. Použití barevných bran v daném bludišti uvádí Hejný [5];
- ***počítačová bludiště***, souvisejí s programy, které přímo vytvářejí bludiště – nejde o počítačové pronásledování v místnostech a chodbách velké budovy
- ***obrázková bludiště***, bývají oproti skutečným rozsáhlejší, lze v nich realizovat prvky nedosažitelné ve skutečných bludištích. Jde v podstatě o kreslená bludiště;
- ***skutečná bludiště***

  Kroměříž – park Květná zahrada

  Praha na Petříně
  Británie - Hampton Court – stěny bludiště jsou ze stříhaných křovin

  Španělsko - Alhambra

Skutečné bludiště - Alhambra2, Granada

Alhambra

Alhambra je velký komplex mnoha budov, hradeb a zahrad. Nejstarší část tvoří pevnost Alcazaba,

ze které se dochovaly už jen mohutné hradby. Druhou velkou část tvoří zahrady Generalife s menšími,

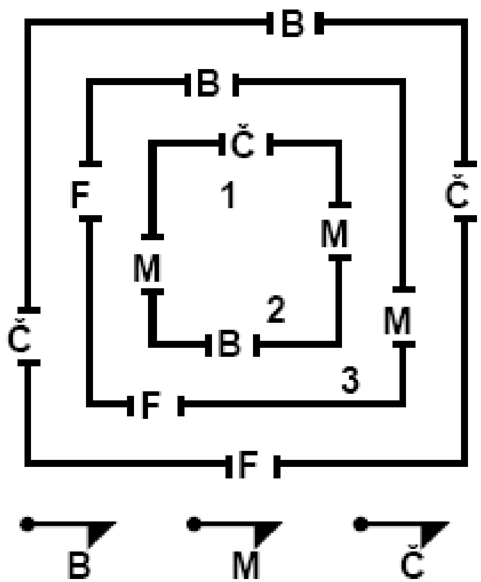
odpočinkovými budovami. Projít je celé se zdá téměř nemožné. Alhambra byla kdysi dlouhou dobu

opuštěná, žila zde různá individua a jednu dobu dokonce Alhambra sloužila jako kasárna. Vlivem toho

je v Alhambře na některých místech výzdoba zcela zničená, některé místnosti jsou dokonce nepřístupné.

Většina výzdoby je ale v pořádku, nebo alespoň zrekonstruovaná, a můžete jen žasnout, jakou

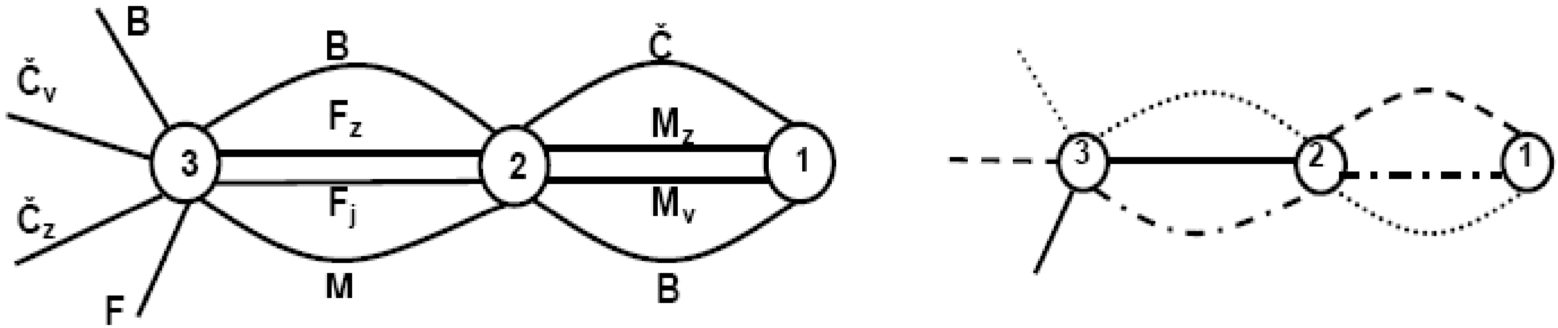
neuvěřitelnou práci si s Alhambrou stavitelé kdysi dali.



Úloha B1

Projděte bludištěm z vnějšku do středu bludiště tak, že otevíráte brány v pořadí barevných klíčů, tj. projdete nejprve bílou bránou (použijete bílý klíč), pak modrou bránou (použijete modrý klíč) a nakonec červenou bránou (použijete červený klíč), postup můžete opakovat.

<u>Řešení:</u> Sestavíme neorientovaný graf dle Obr. B1. Index <u>*v*</u> značí východní bránu, <u>*j*</u> jižní, <u>*z*</u> západní, tzn. $Č_v$ značí červenou východní bránu.



Obr. B1 a) Graf bludiště b) Zjednodušená forma

Z obrázku je zřejmé, že bludištěm se dá projít bez zjevných komplikací.

➤ *Poznámka*

V tabulce jsou uvedeny použité typy čar, které odpovídají jednotlivým barvám.

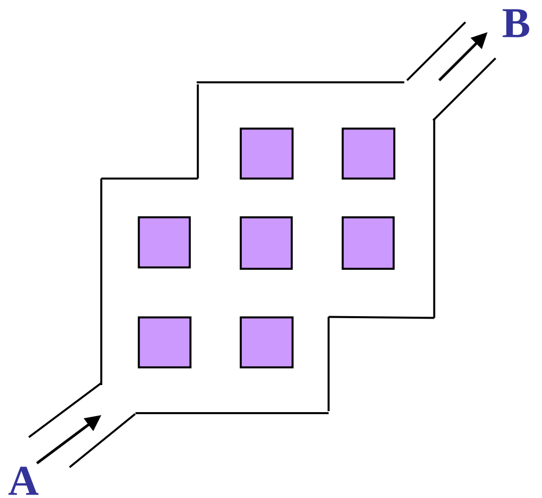
Bílá	Červená	Modrá	Fialová

Problém 11

V místě A vběhla do bludiště (obr. 1) vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

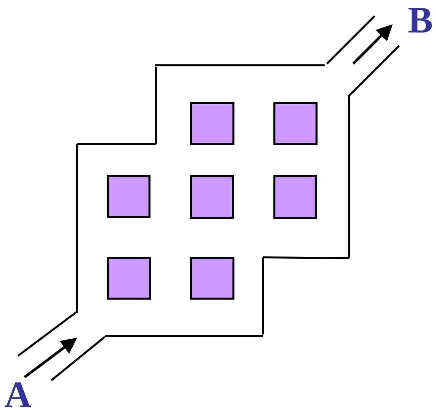
1. ***Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.***
2. ***Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.***
3. ***Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.***

Kolik členů měla myší rodina?

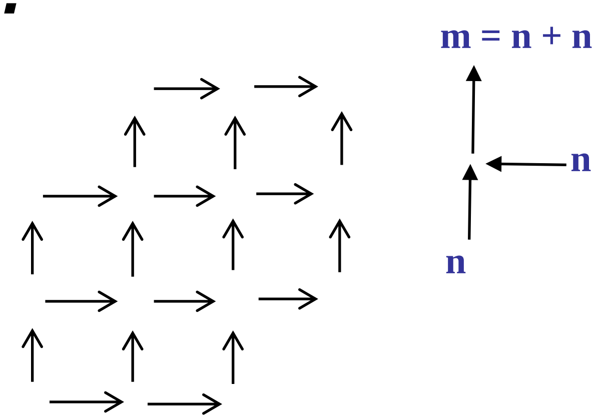


Řešení:

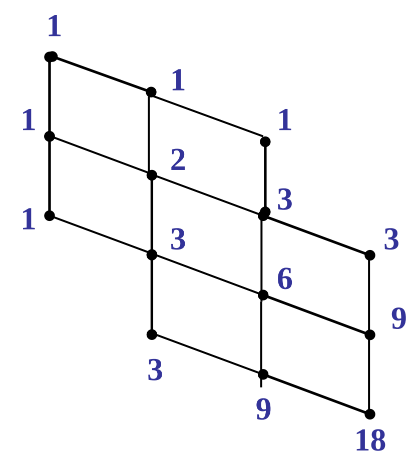
Zakreslíme zjednodušený plán bludiště. Vrcholy ve čtvercové síti představují křižovatky (uzly grafu), jejich strany chodby (hrany grafu) - obr.2. Ve vrcholech čtvercové sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán uvedeným klíčem. Výrazná redukce užitím h-diagramu je evidentní z obr. 3.



Obr. 1 - bludiště



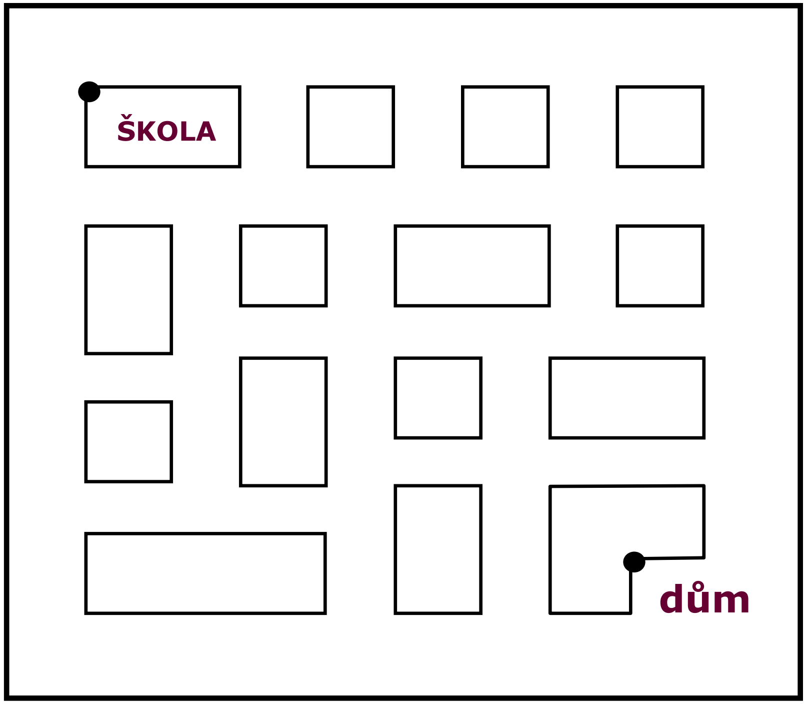
Obr. 2 – Síť bludiště a klíč řešení

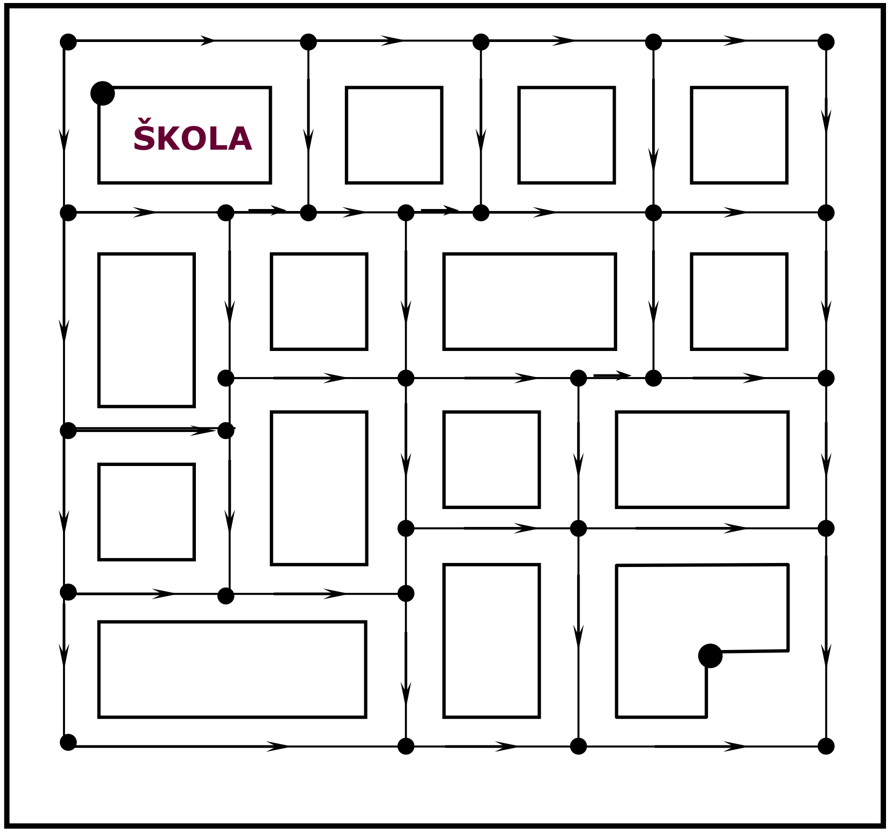


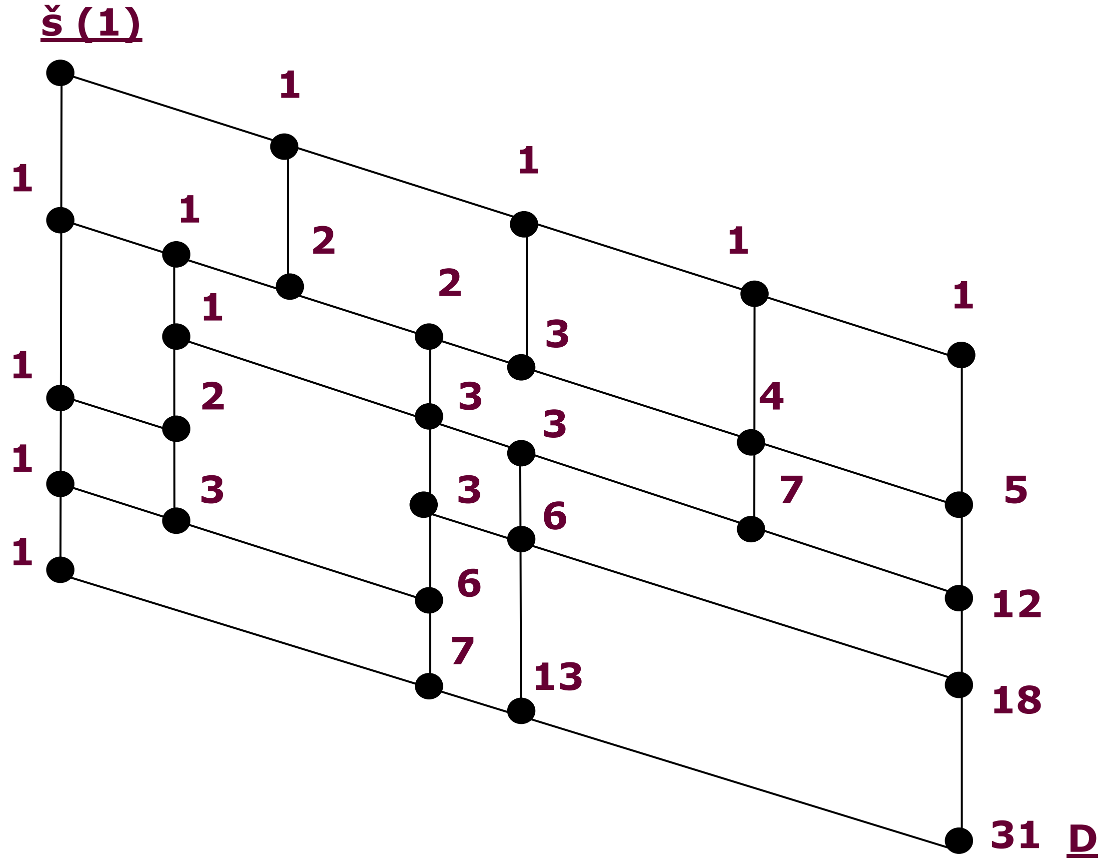
Obr. 3 – *h*-diagram

Problém 12

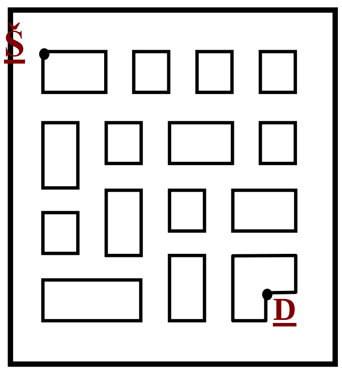
Plánek na obrázku zachycuje schematicky rozmístění budov a křižovatek. Při chůzi zleva doprava a shora dolů hledáme počet různých cest z místa š(kola) do místa d(ům).



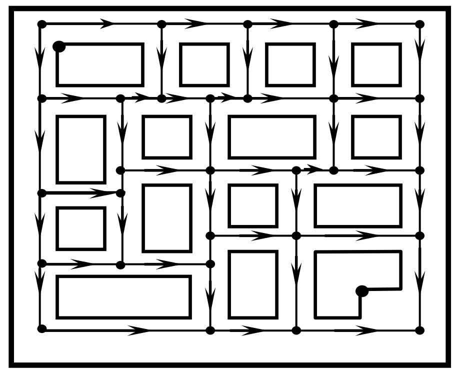

ŠKOLA


š (1)
1
1
1
1
1
2
2
1
1
3
1
2
3
4
3
1
3
3
5
1
6
7
6
12
7
13
18
31
D

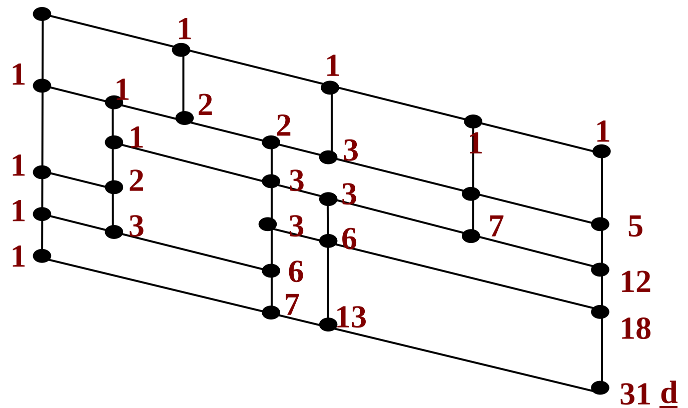
a)



b)



c)



Plánek sídliště **Graf** ***h*-diagram**

Společné prvky problémů 10 až 12

- Ve všech uvedených případech je určován počet prvků nějaké konečné množiny M
- Množina M je rozdělena na několik disjunktních podmnožin $M_1, M_2, \dots, M_k$
- Jsou určeny počty prvků v jednotlivých podmnožinách (označíme $|M_1|, |M_2|, \dots, |M_k|$)
- Počet prvků množiny M určujeme jako součet čísel $|M_i|$:

$$|M| = |M_1| + |M_2|\ |M_1| + \dots + |M_k|$$

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČTU

Problém 13

Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, zošit 4.Orbis Pictus, Istropolitana, Bratislava 1996.

V maturitní třídě probíhá diskuse o tom, jak studenti rozdají svým profesorům pozvánky na „ztužkovací večírek“. Nakonec se dohodli, že pozvánky rozdá dvojice zástupců ze třídy tvořená jedním chlapcema jedním děvčetem. Kolik takových dvojic připadá v úvahu, jestliže do třídy chodí 34 studentů, z toho 14 chlapců a 20 děvčat?

První řešení:

Označíme

- ***chlapce písmenem C***
- ***děvčata písmenem D***

Seznam všech možných dvojic zapíšeme do schématu

C1 – D1	**C2 – D1**	**… … …**	**C14 – D1**
C1 – D2	**C2 – D2**	**… … …**	**C14 – D2**
C1 – D3	**C2 – D3**	**… … …**	**C14 – D3**
… … …	**… … …**	**… … …**	**… … …**
C1 – D20	**C2 – D20**	**… … …**	**C14 – D20**

Kolik má tento seznam prvků?

V každém sloupci je 20 dvojic (odpovídá počtu děvčat)

Počet sloupců odpovídá počtu chlapců – tj. 14

Celkový počet dvojic je roven součinu

$$14 \cdot 20 = 280$$

Druhé řešení:

Stručná úvaha:
První chlapec může utvořit dvojici s 20 děvčaty
Druhý chlapec ……………………….s 20 děvčaty

.

.

.

Poslední chlapec …………………….s 20 děvčaty

Chlapců je 14, každý vytvoří 20 dvojic

Celkem je možno vytvořit

14 . 20 = 280 různých dvojic

Problém 14

Bez zapisování zjistěte, kolik existuje dvojciferných sudých čísel?

Řešení:

Na místě desítek může stát libovolná z cifer 1,2, …, 9,
Na místě jednotek libovolná sudá číslice , z množiny {0, 2, 4, 6, 8}.

Možných čísel je $9 \cdot 5 = 45$

Co mají společné problémy 13 a 14?

V obou předcházejících problémech jsme vybírali nějaké dvojice. Množinu dvojic jsme „rozdělili“ na několik podmnožin podle toho, jak byl vybraný první prvek.

Počet výběrů je pak roven součinu podmnožin a počtu prků v jednotlivých podmnožinách

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

Poznámka:

Násobení je opakované sčítání

(4 . 3 = 3 + 3 + 3 + 3)

Kombinatorické pravidlo součinu je vlastně vylepšené pravidlo součtu pro případ, že všechny podmnožiny mají stejný počet prvků

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PROBLÉMY

Propedeutická fáze pravděpodobnosti

ÚLOHY S KOSTKAMI

Problém 15

Je při hodu 3 kostkami pravděpodobnější součet 11 nebo součet 12?

Přeformulování problému:

Hrají dva hráči. První vyhrává, pokud mu padne součet 11, druhý vyhrává, pokud mu padne součet 12. Který nich má větší šanci vyhrát?

Řešení :

Nejprve označíme sledované:

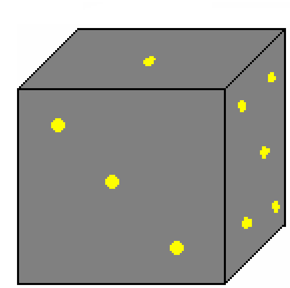
pravděpodobnost součtu 11 – jev A

pravděpodobnost součtu 12 – jev B

Úvaha:

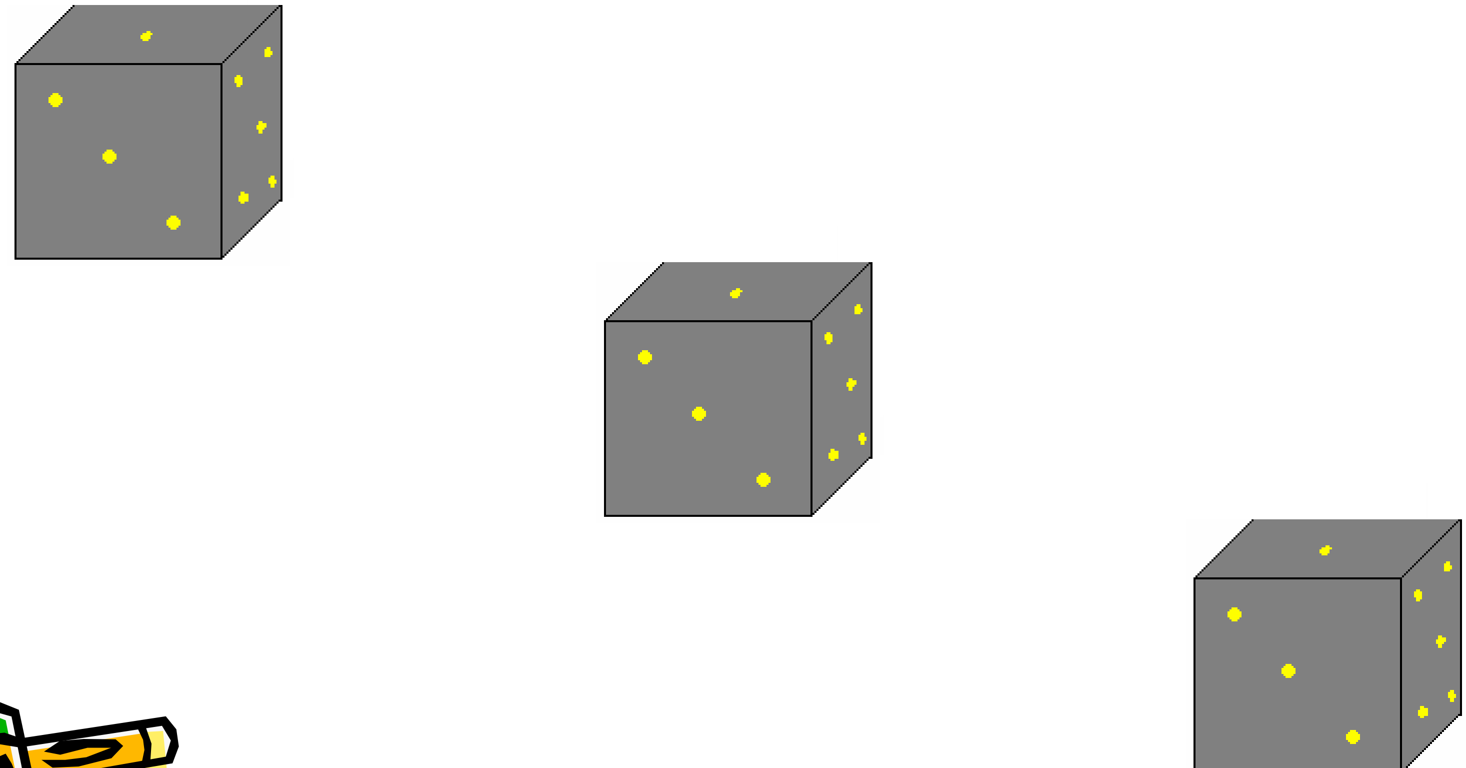
Nejsou oba jevy stejně pravděpodobné?

- Podívejme se na kostku



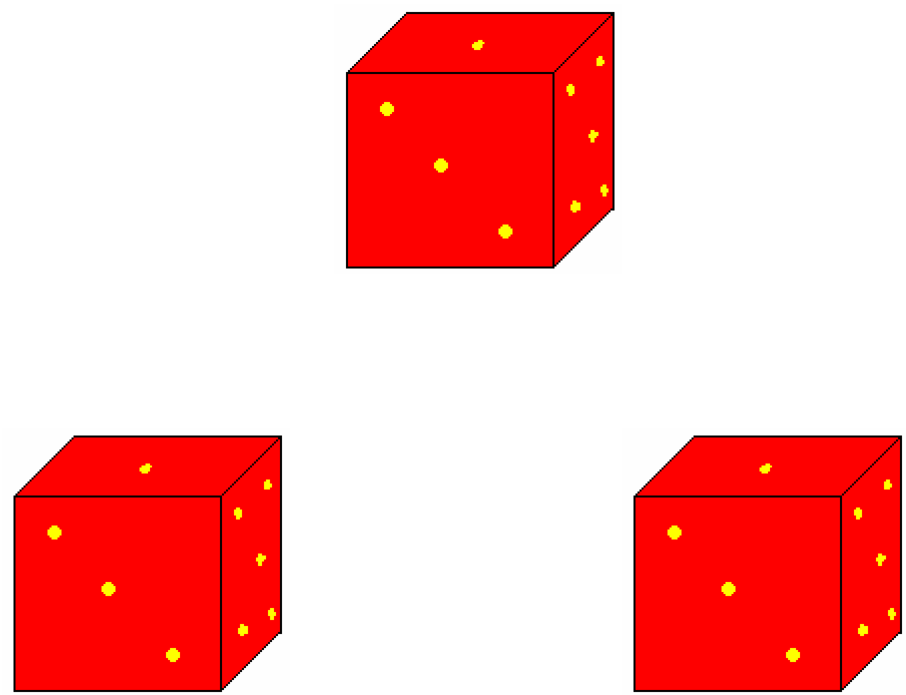
- Při hodu jednou kostkou mohou padnout čísla: 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6

Ale my máme kostky tři !



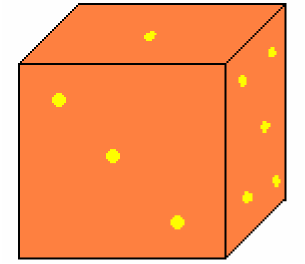
Nejprve se podíváme na součet 11

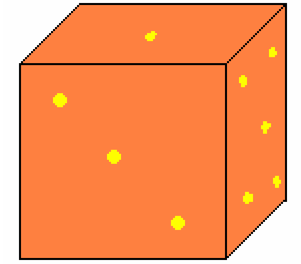
- Součet 11 může vzniknout šesti kombinacemi:
  - 1, 4, 6
  - 1, 5, 5
  - 2, 3, 6
  - 2, 4, 5
  - 3, 4, 4
  - 3, 3, 5

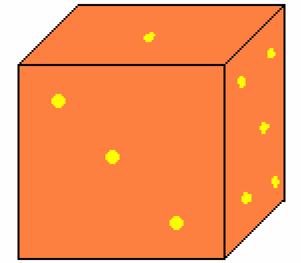


A nyní číslo 12

- Součet 12 můžeme dostat rovněž 6 kombinacemi:
  - 1, 5, 6
  - 2, 4, 6
  - 2, 5, 5
  - 3, 3, 6
  - 3, 4, 6
  - 4, 4, 4







Přesto nejsou oba jevy stejně pravděpodobné !

- Odůvodnění na základě stejného počtu kombinací by bylo nesprávné.

Stejně pravděpodobné jsou jen všechny uspořádané trojice čísel 1,2, ...,6

- Ty vypočítáme pomocí variací , přesněji variací s opakováním:
- V´(k, n) = n umocněno k
- n = 6, protože máme 6 čísel
- k = 3, poněvadž hledáme trojice

$$V' = 6^3$$

Víme, že počet všech možných uspořádaných trojic je :

$m = 6^3 = 216$

- Nyní je třeba vypočítat počet příznivých trojic u čísla 11 - m_A a u čísla 12 m_B, neboť: $P(A) = m_A / m$

$P(B) = m_B / m$

Počet příznivých dostaneme, když každou kombinaci započítáme tolikrát, kolik uspořádaných trojic jí odpovídá

- Například u trojice 1,4,6 můžeme dostat tyto variace: [1, 4, 6],
- [1, 6, 4], [4, 1 ,6], [4, 6, 1], [6, 1, 4], [6, 4, 1]
- u trojice 3, 3, 5 dostaneme tři -
- [3, 3, 5], [3, 5, 3], [5, 3, 3]

mA = 6+3+6+6+3+3
Protože:

- 1, 4, 6 – 6 uspořádaných trojic
- 1, 5, 5 – 3 uspořádané trojice
- 2, 3, 6 – 6 uspořádaných trojic
- 2, 4, 5 – 6 uspořádaných trojic
- 3, 4, 4 – 3 uspořádané trojice
- 3, 3, 5 – 3 uspořádané trojice
- → z toho plyne, že počet příznivých trojic k součtu 11 je mA= 27

Podobně dostaneme počet příznivých uspořádaných trojic součtu 12;
mB =6+6+3+3+6+1

- 1, 5, 6 – 6 uspořádaných trojic
- 2, 4, 6 – 6 uspořádaných trojic
- 2, 5, 5 – 3 uspořádané trojice
- 3, 3, 6 – 3 uspořádané trojice
- 3, 4, 6 – 6 uspořádaných trojic
- 4, 4, 4 – 1 uspořádaná trojice

Z toho plyne, že mB = 25

A konečně se můžeme ☺ pustit do počítání pravděpodobností !

- P(A) = mA /m = 27/ 216 = 0,125
  - P(A) = 12,5 %
- P(B) = mB /m = 25 / 216 = 0,116
  - P(B) = 11,6 %

Můžeme porovnat:
P(A) > P(B)

- Odpověď:

  Při hodu třemi kostkami je větší pravděpodobnost, že součet tří čísel bude 11 než 12.

Problém 16

Házejme dvěma hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost jevu A „Alespoň na jedné kostce padne šestka“?

Přeformulování problému:

Hrají dva hráči. První vyhrává, pokud alespoň na jedné kostce padne 6. Má větší šanci na výhru než druhý hráč?

Řešení:

Pomocí uspořádaných dvojic vypíšeme situace, které mohou nastat (cifra na prvním místě se týká 1. kostky, cifra na 2. místě se týká 2. kostky)

- příznivé situace jsou označeny růžovou barvou

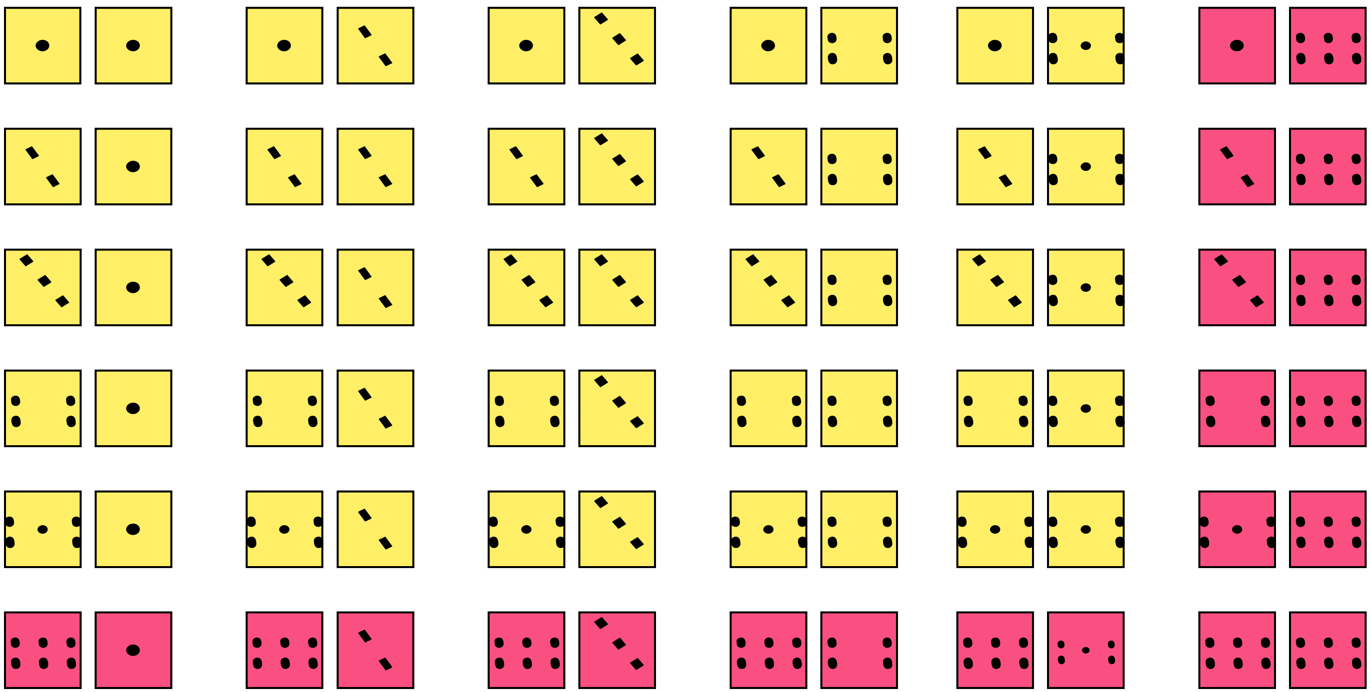
11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Nabízí se 36 výsledků. Z nich 25 neobsahuje žádnou šestku.

V 11 výsledcích padla šestka alespoň jednou: příznivé výsledky

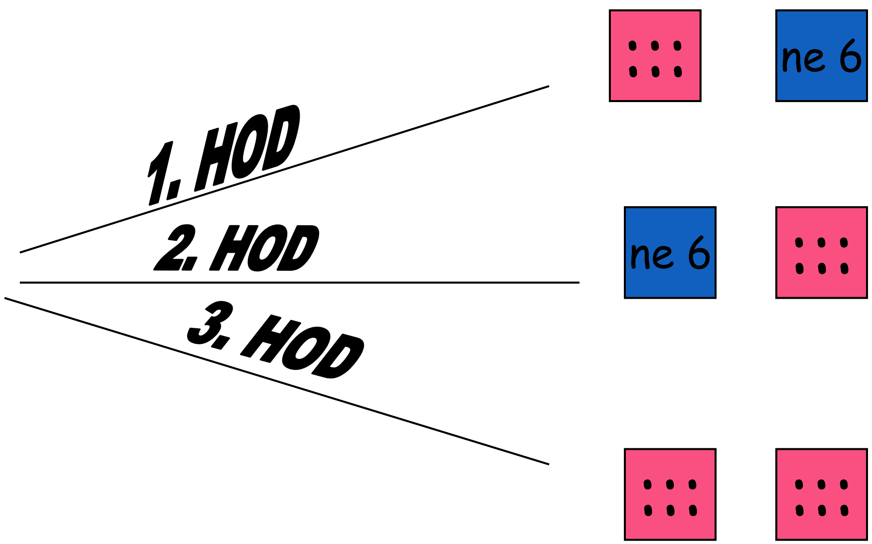
všechny výsledky

11/36 = 0, 3056 = 30, 56%



Třetí způsob řešení

Zakreslíme hody, při kterých padne číslo 6



$1/6 \cdot 5/6 = 5/36$

$5/6 \cdot 1/6 = 5/36$

$1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

$5/36 + 5/36 + 1/36 = 11/36 = 0,3056 =$ <u>30, 56%</u>

P(A) = 6/36… pravděpodobnost, že **na 1. kostce padne** šestka

P(B) = 6/36… pravděpodobnost, že **na 2. kostce padne** šestka

Tyto jevy nejsou navzájem se vylučující

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 0,3056 =$ <u>30, 56%</u>

na 1. kostce padne šestka

na 2. kostce nepadne šestka

$P(A_1) = 1/6 \cdot 5/6 = \underline{5/36}$

na 1. kostce nepadne šestka

na 2. kostce padne šestka

$P(A2) = 5/6 \cdot 1/6 = 5/36$

na 1. kostce padne šestka

na 2. kostce padne šestka

$P(A3) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

Všechny předchozí jevy (A_1, A_2 a A_3) jsou navzájem se vylučující.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$5/36 + 5/36 + 1/36 =$$

$$= 11/36 = 0,3056 = \underline{30,56\%}$$

Problém 17

Házíme třemi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne šestka?

Tabulka výpisu všech možností hodů

(barevně jsou označeny hody, při kterých padne alespoň jednou číslo šest)

1, 1, 1	2, 1, 1	3, 1, 1	4, 1, 1	5, 1, 1	6, 1, 1	1, 2, 1	2, 2, 1	3, 2, 1	4, 2, 1	5, 2, 1	6, 2, 1	1, 3, 1
2, 3, 1	3, 3, 1	4, 3, 1	5, 3, 1	6, 3, 1	1, 4, 1	2, 4, 1	3, 4, 1	4, 4, 1	5, 4, 1	6, 4, 1	1, 5, 1	2, 5, 1
3, 5, 1	4, 5, 1	5, 5, 1	6, 5, 1	1, 6, 1	2, 6, 1	3, 6, 1	4, 6, 1	5, 6, 1	6, 6, 1	1, 1, 2	2, 1, 2	3, 1, 2
4, 1, 2	5, 1, 2	6, 1, 2	1, 2, 2	2, 2, 2	3, 2, 2	4, 2, 2	5, 2, 2	6, 2, 2	1, 3, 2	2, 3, 2	3, 3, 2	4, 3, 2
5, 3, 2	6, 3, 2	1, 4, 2	2, 4, 2	3, 4, 2	4, 4, 2	5, 4, 2	6, 4, 2	1, 5, 2	2, 5, 2	3, 5, 2	4, 5, 2	5, 5, 2
6, 5, 2	1, 6, 2	2, 6, 2	3, 6, 2	4, 6, 2	5, 6, 2	6, 6, 2	1, 1, 3	2, 1, 3	3, 1, 3	4, 1, 3	5, 1, 3	6, 1, 3
1, 2, 3	2, 2, 3	3, 2, 3	4, 2, 3	5, 2, 3	6, 2, 3	1, 3, 3	2, 3, 3	3, 3, 3	4, 3, 3	5, 3, 3	6, 3, 3	1, 4, 3
2, 4, 3	3, 4, 3	4, 4, 3	5, 4, 3	6, 4, 3	1, 5, 3	2, 5, 3	3, 5, 3	4, 5, 3	5, 5, 3	6, 5, 3	1, 6, 3	2, 6, 3
3, 6, 3	4, 6, 3	5, 6, 3	6, 6, 3	1, 1, 4	2, 1, 4	3, 1, 4	4, 1, 4	5, 1, 4	6, 1, 4	1, 2, 4	2, 2, 4	3, 2, 4
4, 2, 4	5, 2, 4	6, 2, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	3, 3, 4	4, 3, 4	5, 3, 4	6, 3, 4	1, 4, 4	2, 4, 4	3, 4, 4	4, 4, 4
5, 4, 4	6, 4, 4	1, 5, 4	2, 5, 4	3, 5, 4	4, 5, 4	5, 5, 4	6, 5, 4	1, 6, 4	2, 6, 4	3, 6, 4	4, 6, 4	5, 6, 4
6, 6, 4	1, 1, 5	2, 1, 5	3, 1, 5	4, 1, 5	5, 1, 5	6, 1, 5	1, 2, 5	2, 2, 5	3, 2, 5	4, 2, 5	5, 2, 5	6, 2, 5
1, 3, 5	2, 3, 5	3, 3, 5	4, 3, 5	5, 3, 5	6, 3, 5	1, 4, 5	2, 4, 5	3, 4, 5	4, 4, 5	5, 4, 5	6, 4, 5	1, 5, 5
2, 5, 5	3, 5, 5	4, 5, 5	5, 5, 5	6, 5, 5	1, 6, 5	2, 6, 5	3, 6, 5	4, 6, 5	5, 6, 5	6, 6, 5	1, 1, 6	2, 1, 6
3, 1, 6	4, 1, 6	5, 1, 6	6, 1, 6	1, 2, 6	2, 2, 6	3, 2, 6	4, 2, 6	5, 2, 6	6, 2, 6	1, 3, 6	2, 3, 6	3, 3, 6
4, 3, 6	5, 3, 6	6, 3, 6	1, 4, 6	2, 4, 6	3, 4, 6	4, 4, 6	5, 4, 6	6, 4, 6	1, 5, 6	2, 5, 6	3, 5, 6	4, 5, 6
5, 5, 6	6, 5, 6	1, 6, 6	2, 6, 6	3, 6, 6	4, 6, 6	5, 6, 6	6, 6, 6					

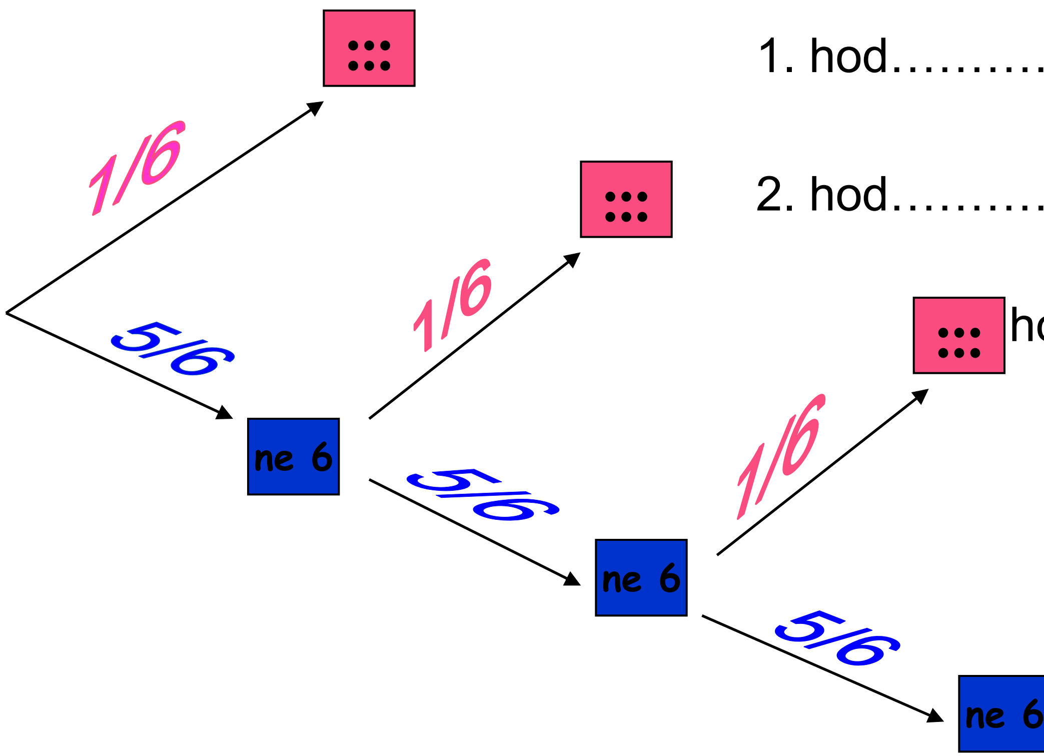
Podle tabulky je všech možných kombinací 216. Z toho příznivých 91.

příznivé výsledky

všechny výsledky

91/216 = 0, 4213 = 42%

Další způsob řešení:



1. hod................. 1/6

2. hod................. 1/6 · 5/6 = 5/63

hod...... 5/6 · 5/6 · 1/6 = 25/216

nepadne žádná šestka

5/6 · 5/6 · 5/6 = 125/216

Šance, že alespoň v jednom ze tří pokusů padne šestka, je:

1 – 125/216 = 216/216 - 125/216 = 91/216 = 0, 4213

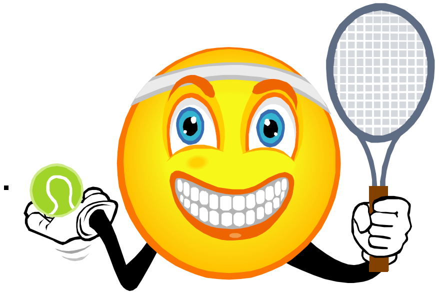
odečteme nepříznivé hody

Nebo můžeme sečíst šance, při kterých padne číslo 6:

1/6 + 5/36 + 25/216 = 91/216 = 0, 4213

Trochu reality

Problém 18

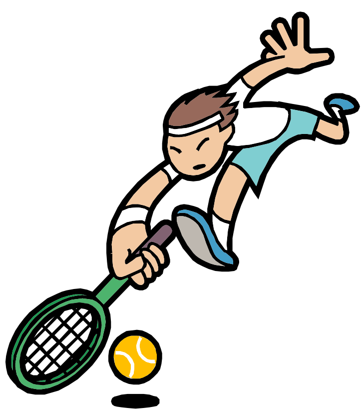


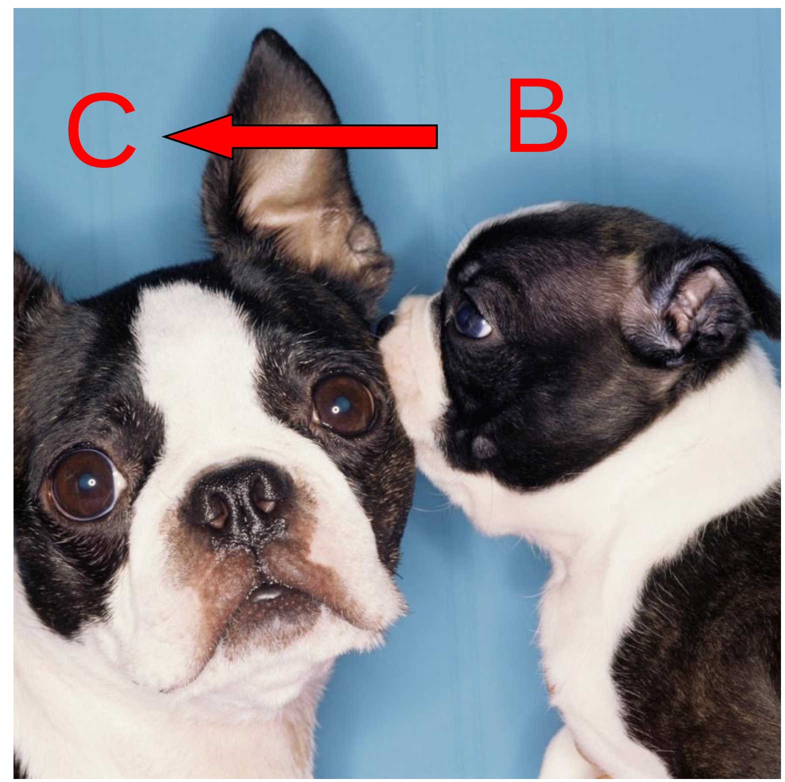
Každý z pěti lhářů B,C,D,E,F říká pravdu právě v jednom ze tří případů.

Lhář B se jako první z nich dozví, který z finalistů K,L se stal vítězem tenisového poháru (ostatní znají pouze oba finalisty).

B sdělí tuto zprávu C, ten ji oznámí D, D ji předá E a E ji sdělí F.

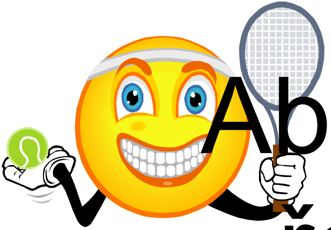
Jaká je pravděpodobnost, že F se dozví pravdu?





Malá rekapitulace :

- Kolik bylo lhářů? **5**
- Kdy lhali ? V **2** ze **3** případů.
- Kdo vyhrál tenisový turnaj ? **nevíme**



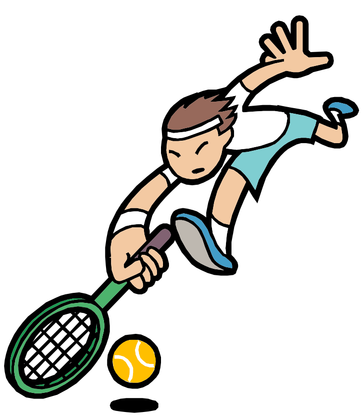
Aby se nám příklad lépe počítal, řekněme si, že vyhrál hráč L.

Když řekl pan B panu C pravdu, řekl mu tedy že vyhrál

$\boxed{L}$

Když řekl pan B panu C lež, řekl mu tedy že vyhrál

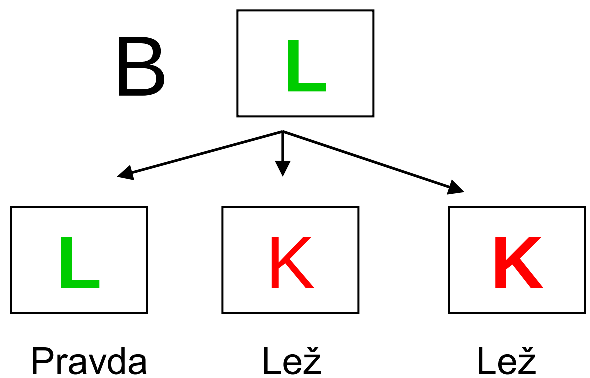
$\boxed{K}$

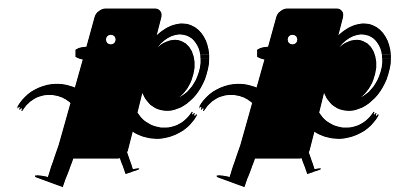


Nakresleme si malý diagram…

- Jak to mohlo vypadat když šeptal do ucha pan B panu C

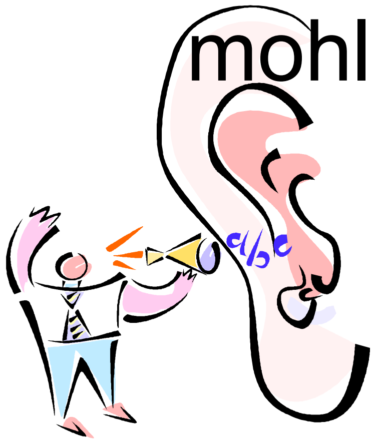
C

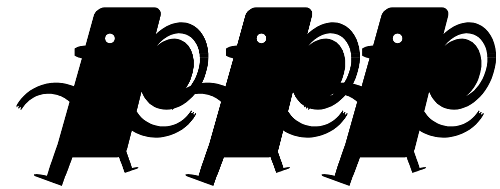


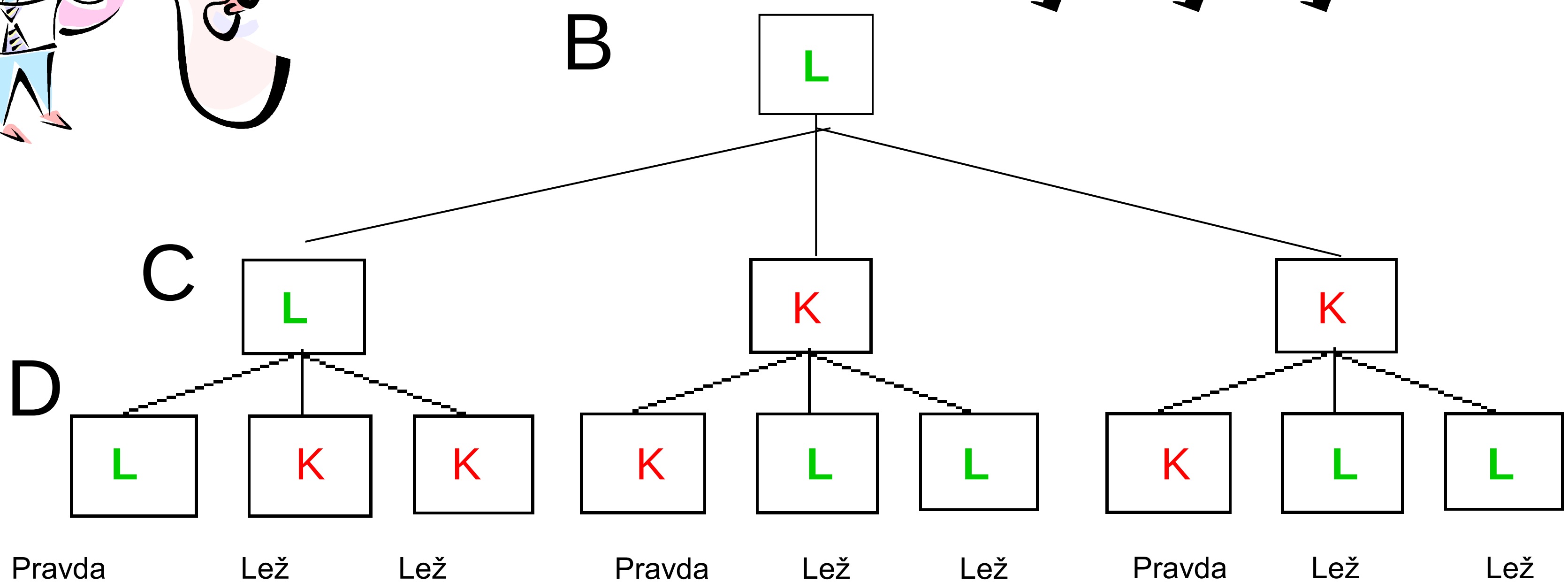


Pokud pan B říkal pravdu, dozvěděl se pan C že vyhrál L, pokud ale pan B Lhal, dozvěděl se pan C že vyhrál K.

- A od pana C se k uším pana D mohlo donést…

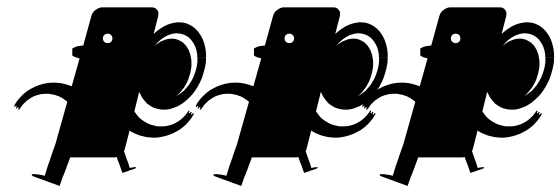


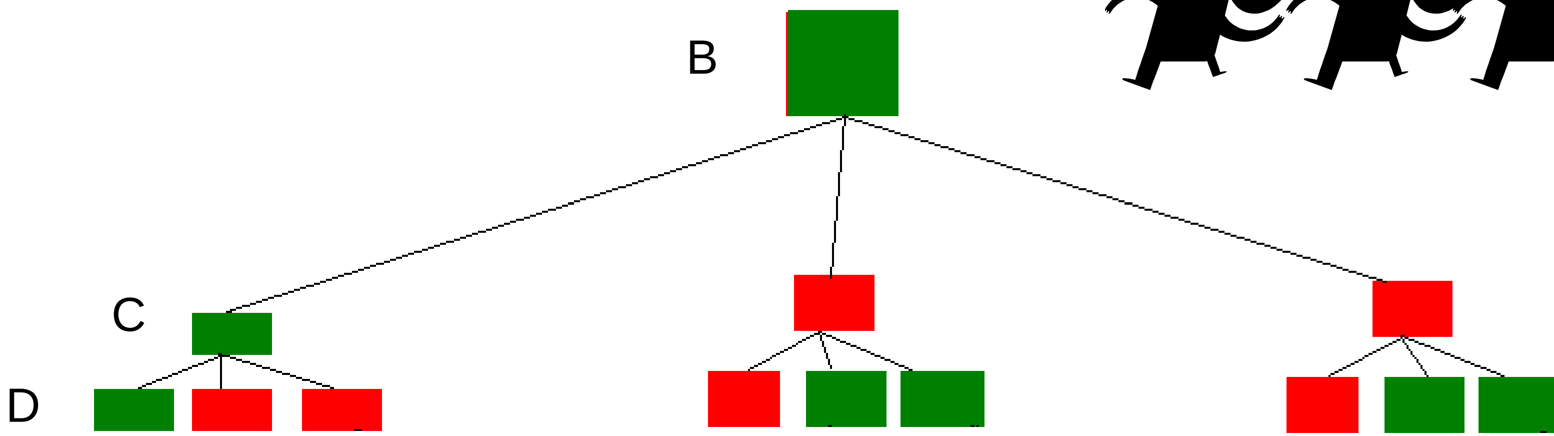


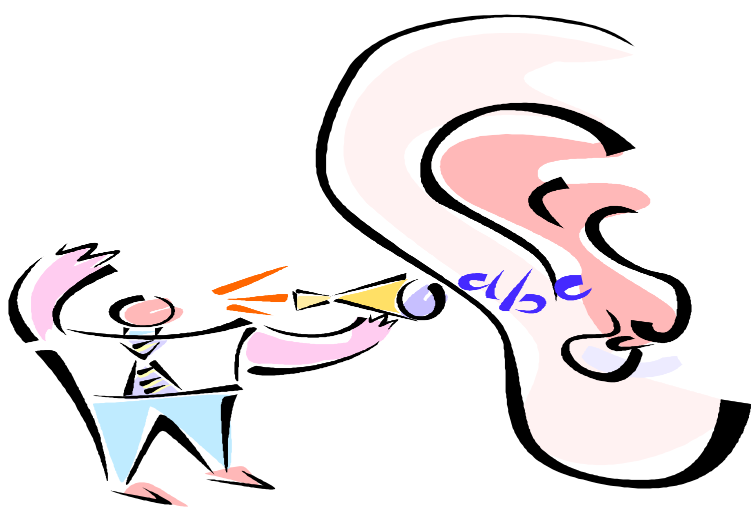


Hráče L budeme značit

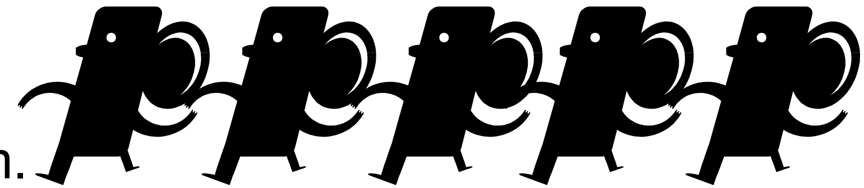
Hráče K budeme značit



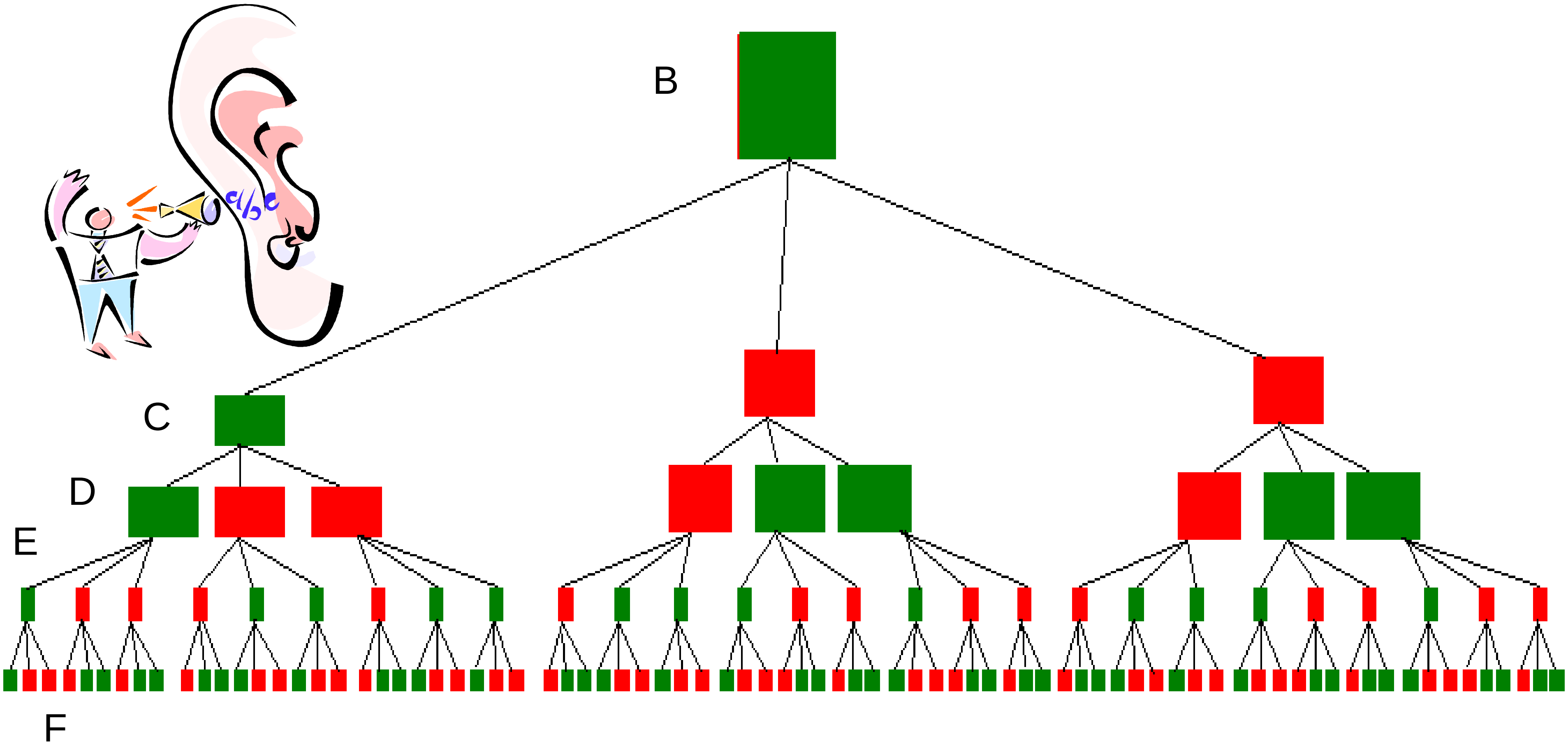




V sestavování diagramu bychom stejným způsobem bychom pokračovali dál.



Konečným výsledkem je tento diagram.



Jaká je tedy pravděpodobnost, že se pan F dozví pravdu?

Pravděpodobnost vypočítáme takto : $\dfrac{\text{počet příznivých jevů}}{\text{celkový počet všech jevů}}$

Nebo – li v našem příkladě : $\dfrac{\text{počet pravd}}{\text{počet pravd i lží celkem}}$

V posledním řádku bylo pravd **41** a celkem okének **81**

Výpočet pravděpodobnosti : $\dfrac{\mathbf{41}}{\mathbf{81}} = 0.506172839$

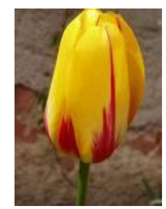
0.506172839 = 51%

Problém 19

Zákazník si přál uvázat kytici ze tří květin.

A) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici bude růže?

B) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici nebude kombinace tulipánu s gerberou?

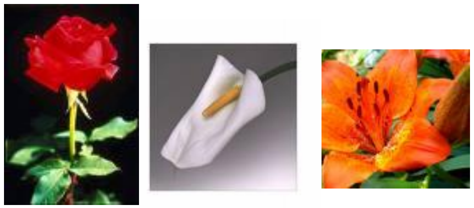


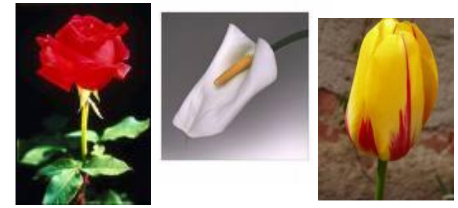

C) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici bude růže s kalou nebo růže s lilií?

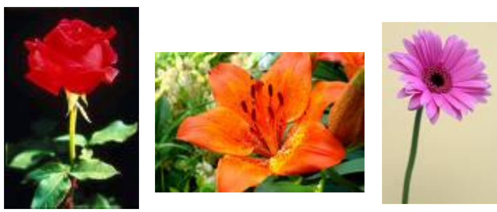


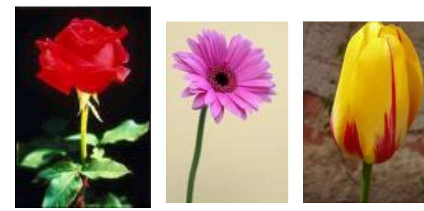

Nejprve si vypíšeme všechny možnosti kytic:

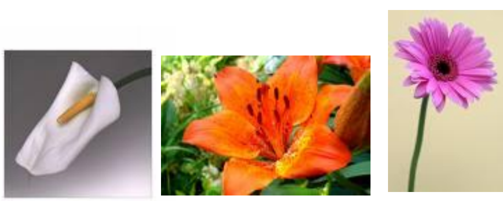
(U kytic nezáleží na pořadí - jde o kombinaci květin, a každá květina je v kytici obsažena pouze jednou.)

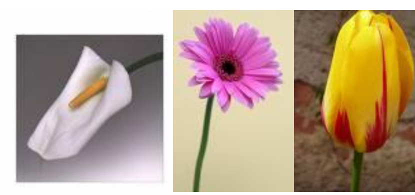


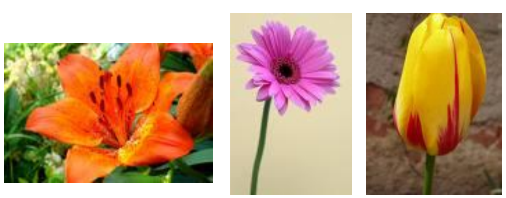






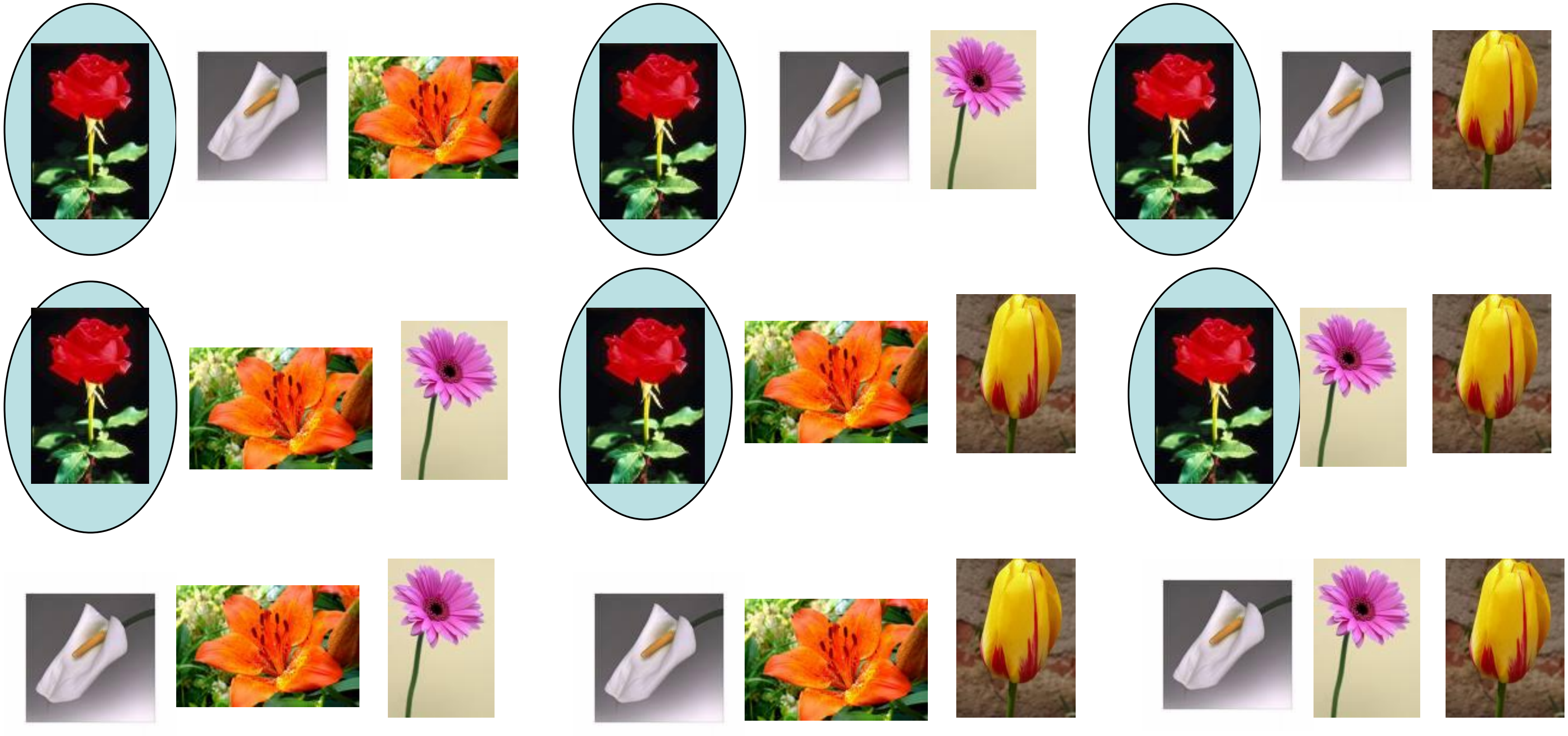


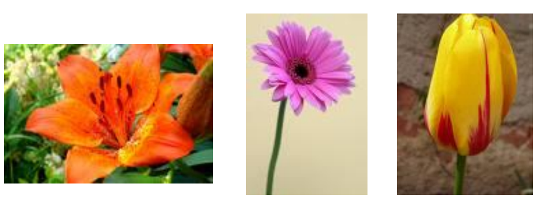




Můžeme uvázat 10 kytic s různými kombinacemi květin.

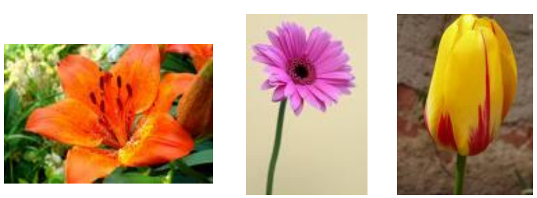
A) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici bude růže?





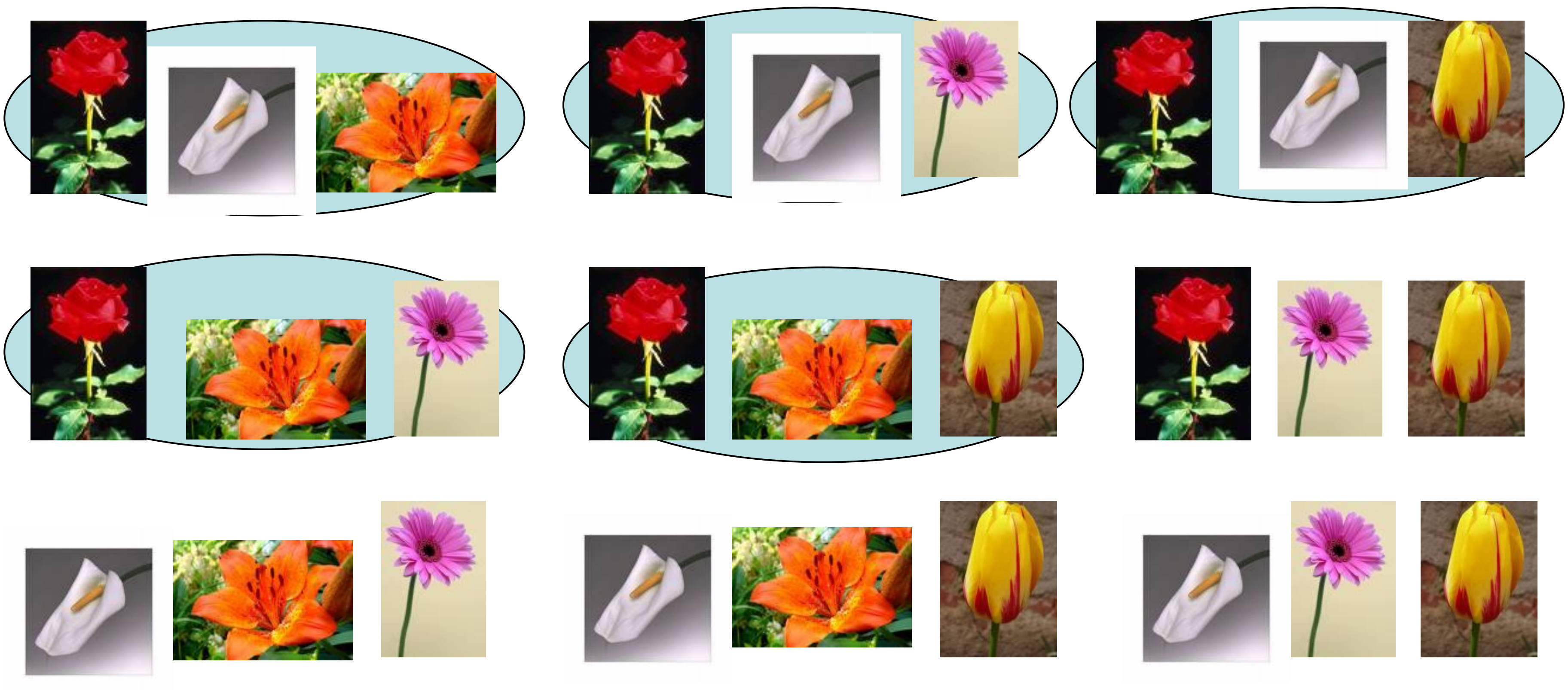
6 kytic z 10 obsahuje růži – 60%.

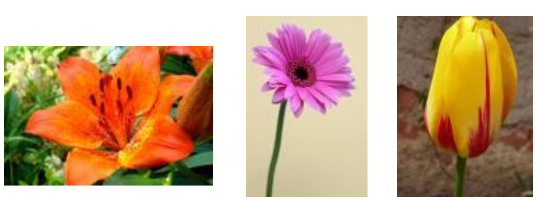
B) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici nebude kombinace tulipánu s gerberou?



7 kytic z 10 neobsahuje kombinaci tulipánu s gerberou – 70%.

C) Jaká je pravděpodobnost, že v kytici bude růže s kalou nebo růže s lilií?





5 kytic z 10 obsahuje růži s kalou nebo růži s lilií – 50%.

Problém 20

Kdo má pravdu?

- Dva kamarádi Pepa a Michal se mezi sebou hádali, kdo má pravdu:

Mám větší šanci hodit 4-krát kostkou alespoň jednu 6.

Pepa

Budeš mít větší šanci, když budeš házet 24-krát dvěma kostkami a alespoň jedenkrát hodíš najednou dvě šestky.

Michal

Který z nich má pravdu?

DĚLITELNOST

Problém 21

Máme čtyřciferné číslo

3 A B 1

. . . .

☺ Zvolte číslici A tak, aby při náhodné volbě číslice B platilo: „Pravděpodobnost, že toto čtyřciferné číslo je dělitelné 9, je 20%."

P (9/ 3AB1) = 0,2

Jak se pozná, zda je číslo dělitelné číslem 9?

Součet cifer musí být dělitelný číslem 9.

Které z těchto čísel je dělitelné 9?

3051 3431

3+0+5+1=9 3+4+3+1=11

Zkusme si vypsat všechny možnosti dosazení za A a B.

Zakroužkuj čísla, která čísla jsou dělitelná 9?

3001	3101	3201	3301	3401	3501	3601	3701	3801	3901
3011	3111	3211	3311	3411	3511	3611	3711	3811	3911
3021	3121	3221	3321	3421	3521	3621	3721	3821	3921
3031	3131	3231	3331	3431	3531	3631	3731	3831	3931
3041	3141	3241	3341	3441	3541	3641	3741	3841	3941
3051	3151	3251	3351	3451	3551	3651	3751	3851	3951
3061	3161	3261	3361	3461	3561	3661	3761	3861	3961
3071	3171	3271	3371	3471	3571	3671	3771	3871	3971
3081	3181	3281	3381	3481	3581	3681	3781	3881	3981
3091	3191	3291	3391	3491	3591	3691	2791	3891	3991

Troufnete si nyní určit, které číslo musíme dosadit za A, aby platila 20%pravděpodobnost, že při náhodné volbě číslice B bude čtyřciferné číslo dělitelné číslem 9?

3001	3101	3201	3301	3401	3501	3601	3701	3801	3901
3011	3111	3211	3311	3411	3511	3611	3711	3811	3911
3021	3121	3221	3321	3421	3521	3621	3721	3821	3921
3031	3131	3231	3331	3431	3531	3631	3731	3831	3931
3041	3141	3241	3341	3441	3541	3641	3741	3841	3941
3051	3151	3251	3351	3451	3551	3651	3751	3851	3951
3061	3161	3261	3361	3461	3561	3661	3761	3861	3961
3071	3171	3271	3371	3471	3571	3671	3771	3871	3971
3081	3181	3281	3381	3481	3581	3681	3781	3881	3981
3091	3191	3291	3391	3491	3591	3691	2791	3891	3991

Zkusíme na to jít od lesa.

- Za A a B jsme dosazovali číslice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9……=10 číslic
- Kolikrát nám musí číslice dosazená za A vyhovovat, abychom získali 20% pravděpodobnost?

  Nápověda: 10 =100%....................2 =20%

  Musí vyhovovat dvakrát.
- Která z číslic dosazených za A nám vyhovuje dvakrát?

3001	3101	3201	3301	3401	3501	3601	3701	3801	3901
3011	3111	3211	3311	3411	3511	3611	3711	3811	3911
3021	3121	3221	3321	3421	3521	3621	3721	3821	3921
3031	3131	3231	3331	3431	3531	3631	3731	3831	3931
3041	3141	3241	3341	3441	3541	3641	3741	3841	3941
3051	3151	3251	3351	3451	3551	3651	3751	3851	3951
3061	3161	3261	3361	3461	3561	3661	3761	3861	3961
3071	3171	3271	3371	3471	3571	3671	3771	3871	3971
3081	3181	3281	3381	3481	3581	3681	3781	3881	3981
3091	3191	3291	3391	3491	3591	3691	2791	3891	3991

$\boxed{A=5}$

3AB1

A nyní si to zkusíme ověřit početně.

3 + 1=4

A+B=?

Připomenutí:

Součet cifer musí být dělitelný 9.

$9 - 4 = \boxed{5}$

$18 - 4 = \boxed{14}$

$27 - 4 = \cancel{23}$

Hodí se nám číslo 23 jako součet A+B?

Ne, protože součtem dvou jednociferných čísel nikdy nemůže být číslo větší jak 18 a my vybíráme pouze z čísel 0-9.

9+9=18

A+B=5

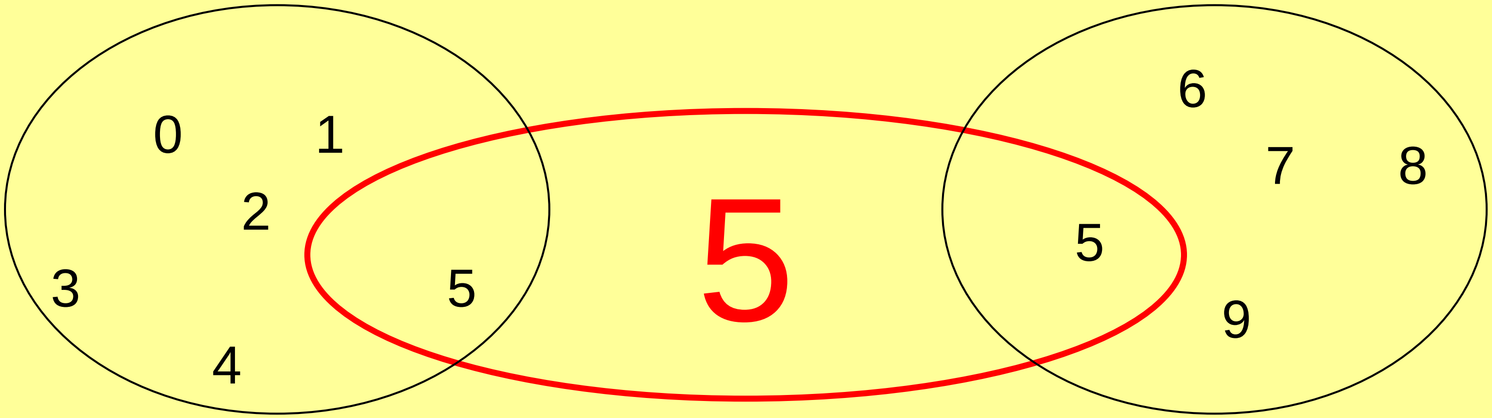
- Jaká číslice by se mohla dosadit za A?
- (5,4,3,2,1,0)

A+B=14

- Jaké číslice by se mohla dosadit za A?
- (5,6,7,6,5)

A≤5

A≥5



Co je průnikem těchto dvou množin?

3AB1

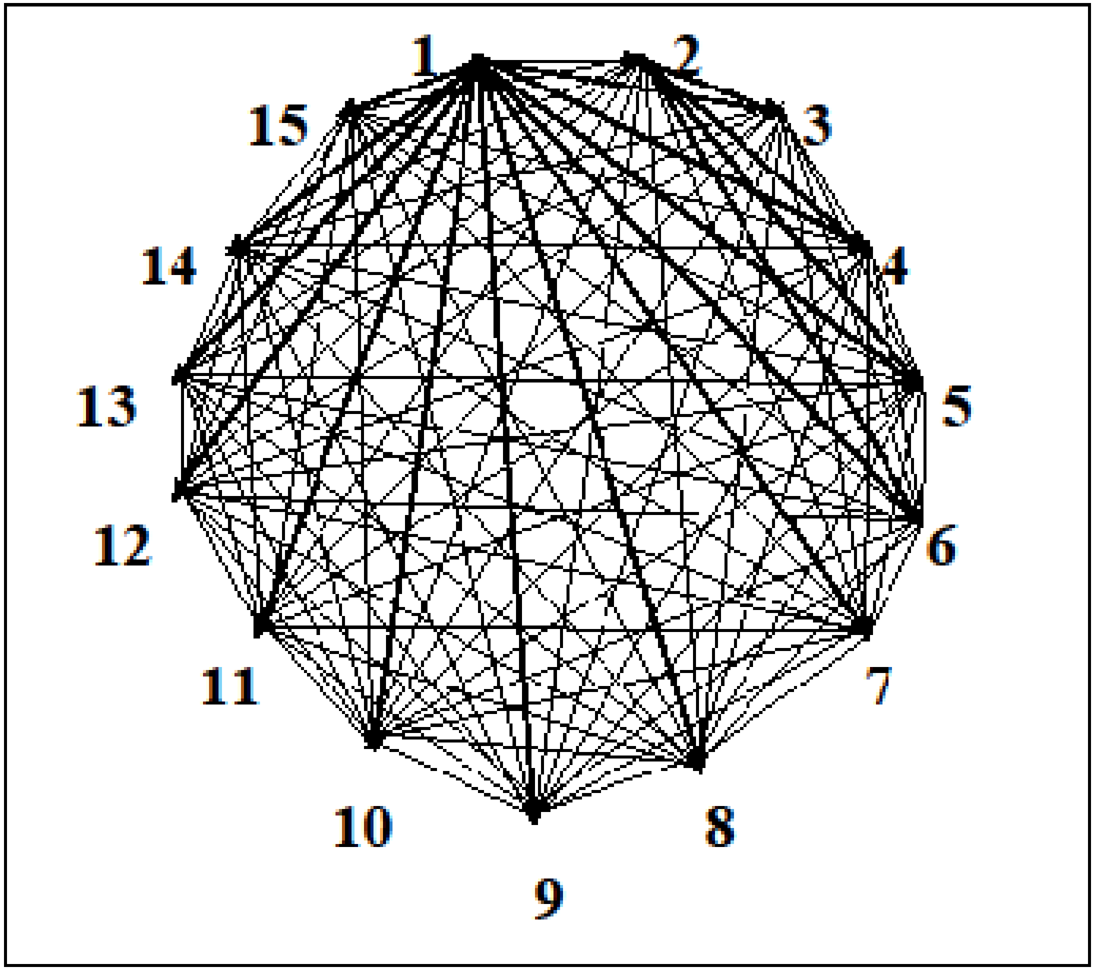
A=5

A+B=5	A+B=14
5+B=5	5+B=14
B=0	B=14 – 5
	B=9
3501	3591

Problém 22

V osudí je 15 čísel 1, 2, 3, 4, ... 15. Náhodně vyber dvě z nich. Jaká je pravděpodobnost, že součet obou tažených čísel je dělitelný číslem 6?

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9	1+10	1+11	1+12	1+13	1+14	1+15
2			2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8	2+9	2+10	2+11	2+12	2+13	2+14	2+15
3				3+4	3+5	3+6	3+7	3+8	3+9	3+10	3+11	3+12	3+13	3+14	3+15
4					4+5	4+6	4+7	4+8	4+9	4+10	4+11	4+12	4+13	4+14	4+15
5						5+6	5+7	5+8	5+9	5+10	5+11	5+12	5+13	5+14	5+15
6							6+7	6+8	6+9	6+10	6+11	6+12	6+13	6+14	6+15
7								7+8	7+9	7+10	7+11	7+12	7+13	7+14	7+15
8									8+9	8+10	8+11	8+12	8+13	8+14	8+15
9										9+10	9+11	9+12	9+13	9+14	9+15
10											10+11	10+12	10+13	10+14	10+15
11												11+12	11+13	11+14	11+15
12													12+13	12+14	12+15
13														13+14	13+15
14															14+15
15															


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Využití kombinatorických vztahů

Problém 23

Zadání úlohy

- V kupé je deset míst, pět ve směru jízdy a pět proti směru. Tři pasažéři chtějí sedět ve směru jízdy a jeden proti směru jízdy. Ostatním šesti, mezi něž patří Venoušek s maminkou, je to jedno, až na to, že Venoušek chce sedět u okna a vedle maminky. Kolika způsoby se mohou cestující usadit, aby byli všichni spokojeni?

Co víme

- Tři pasažéři chtějí sedět ve směru jízdy
- Jeden pasažér chce jet proti směru jízdy
- Ostatním šesti, mezi něž patří Venoušek s maminkou, je to jedno.
- Venoušek však chce sedět u okna a vedle maminky.

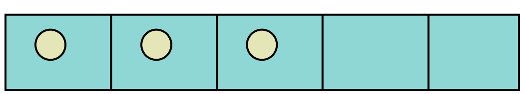
Princip řešení

- Tuto úlohu budeme řešit pomocí vzorce pro variace bez opakování.

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Řešení pro první tři pasažéry

- Tři pasažéři chtějí jet ve směru jízdy.
- Ve směru jízdy je pět sedadel.
- Jaký je počet variací pro jejich usazení?



- Výpočet:

$$V\ 3(5) = \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$V\ 3(5) = \frac{5.4.3.2.1}{2\ .1}$$

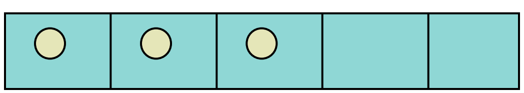
$$V\ 3(5) = \frac{5.4.3}{1}$$

$$V\ 3(5) = \underline{60}$$

Počet variací pro usazení prvních tří pasažérů je 60.

Řešení pro jednoho pasažéra v protisměru.

- Jeden pasažér chce jet proti směru jízdy.
- V protisměru jízdy je pět sedadel.
- Jaký je počet variací pro jeho usazení?



- Výpočet:

$$V\ 1(5) = \frac{5!}{(5-1)!}$$

$$V\ 3(5) = \frac{5.4.3.2.1}{4.3.2.1}$$

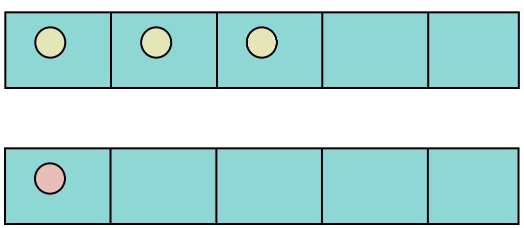
$$V\ 3(5) = \frac{5}{1}$$

$$V\ 3(5) = \underline{5}$$

Počet variací pro usazení jednoho pasažéra je 5.

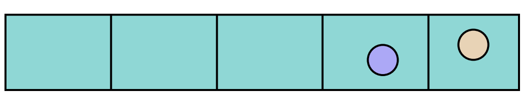
Počet možných variací pro usazení tří pasažérů ve směru jízdy a jednoho pasažéra proti směru jízdy je:

60 . 5 = <u>300</u>



Řešení pro Venouška a maminku.

- Venoušek chce sedět pouze u okna a zároveň vedle maminky.
- Maminka nemá jinou možnost, než sedět vedle okna.



- Výpočet:

$$V\ 1(2) = \frac{2!}{(2-1)!}$$

$$V\ 1(2) = \frac{2.1}{1}$$

Venoušek V 1(2) = 2

Maminka V 1(2) = 2

2.2 = <u>4</u>

Počet variací pro Venouška je 2.

Počet variací pro maminku je 2.

Počet variací pro oba je 4.

Řešení pro zbylé čtyři pasažéry.

- Posledním pasažérům je jedno, kde budou sedět.
- Mají vždy na výběr čtyři sedadla. A to buď čtyři v protisměru jízdy nebo dvě sedadla v protisměru a dvě ve směru jízdy.
- Podle toho, kam se sedne Venda s maminkou.

- Výpočet:

$$4\,! = 4.3.2.1 = 24$$

Počet variací pro poslední čtyři pasažéry je 24.

Závěrečný výpočet

- První tři cestující, kteří chtějí jet ve směru jízdy, mají **60** variant.
- Jeden cestující, který chce jet v protisměru má **5** variant.
- Paličatý Venoušek

  s maminkou mají dohromady **4** varianty.
- Poslední čtyři cestující mají **24** variant.

Výpočet:

Všechny možné varianty musíme mezi sebou vynásobit.

60.5.4.24 = <u>28 800</u>

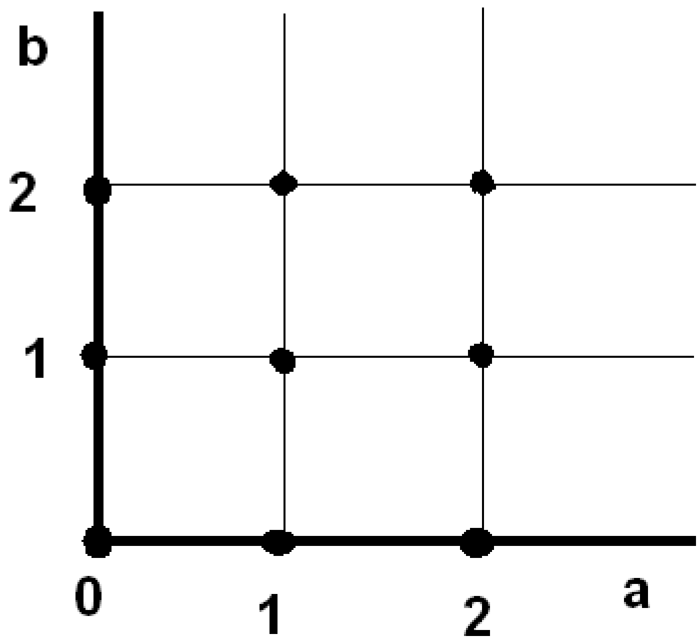
GEOMETRICKÉ PROBLÉMY

Problém 24

V rovině vyznačíme množinu bodů {[a,b]; a,b {1, 2, 3}}. Z této množiny náhodně vyberte čtyři body. V kolika případech budou vybrané body tvořit

a) čtverec
b) nekonvexní 4-úhelník

Množina bodů v rovině



Počet všech možných výběrů:

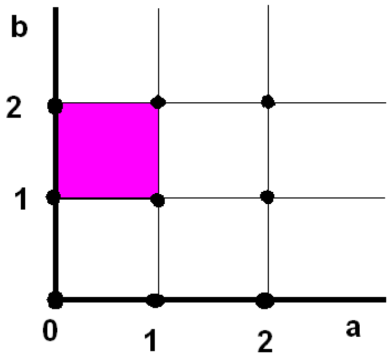
$$K\ (k;n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

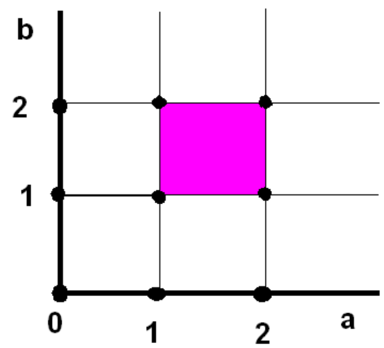
$$K\ (4;9) = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6.\cancel{5}!}{4!\cancel{5}!} =$$

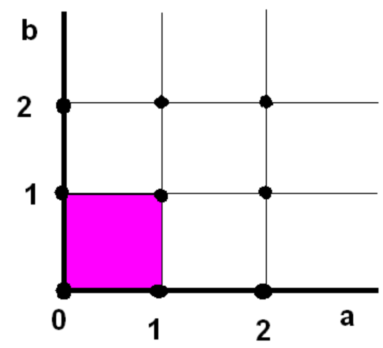
$$= \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = \underline{\underline{126}}$$

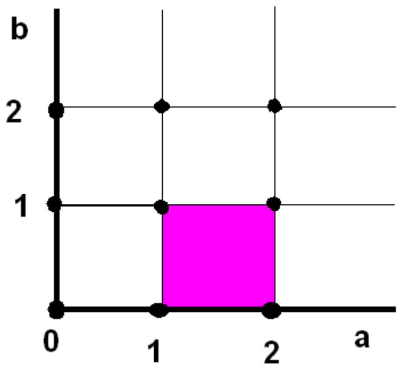
Všechny možné kombinace 4 bodů z daných 9

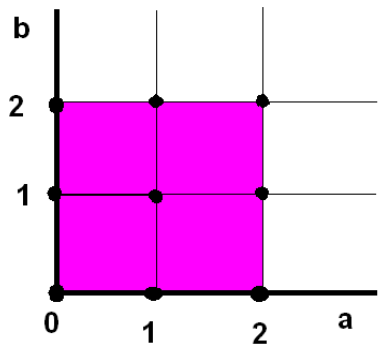
Čtverce

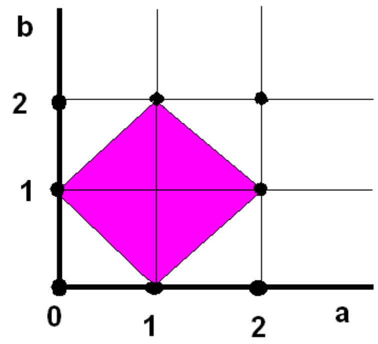




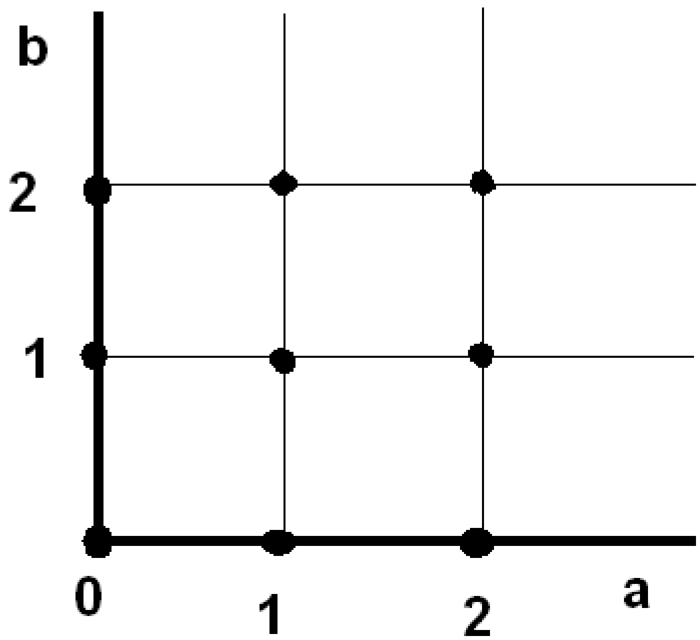


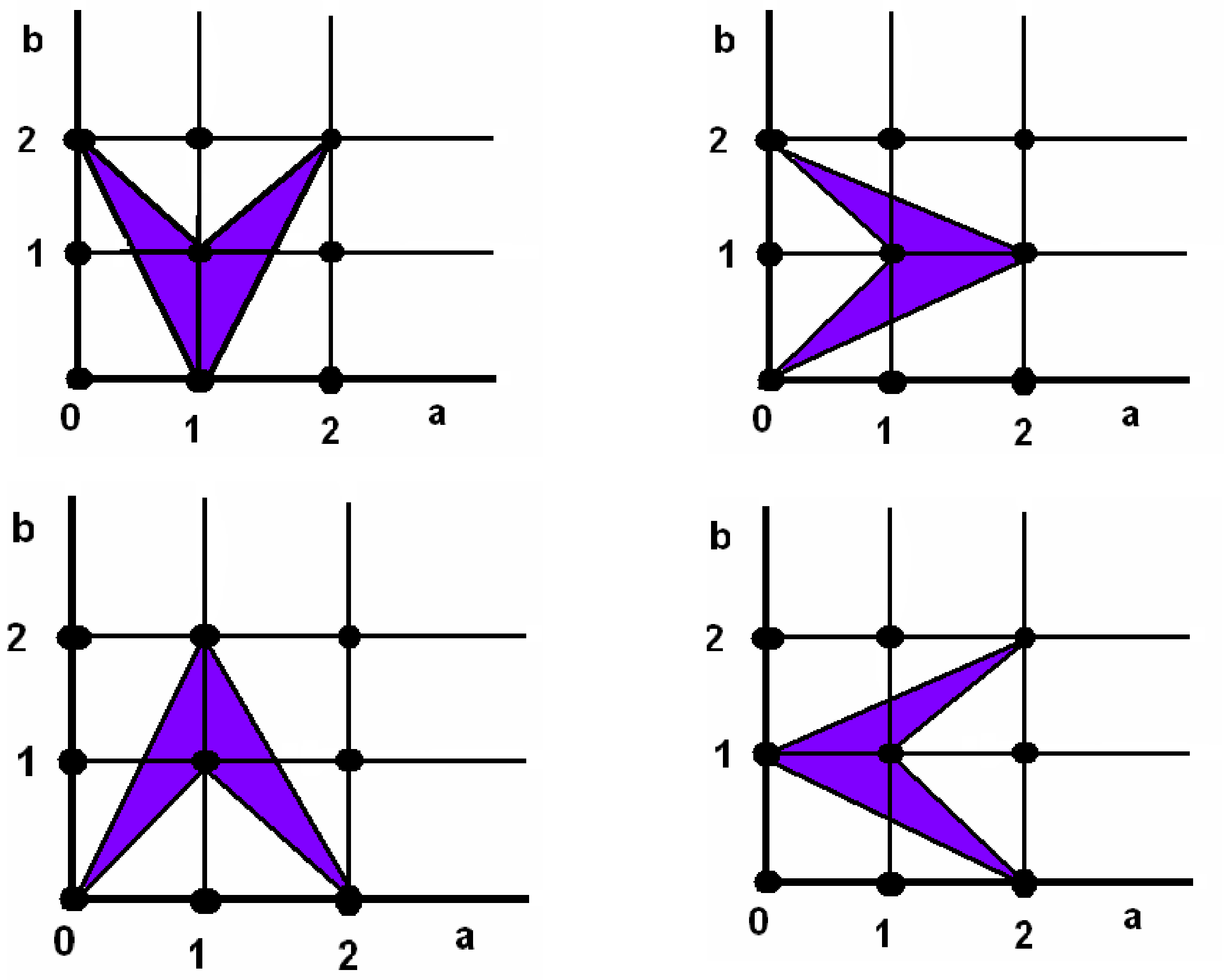


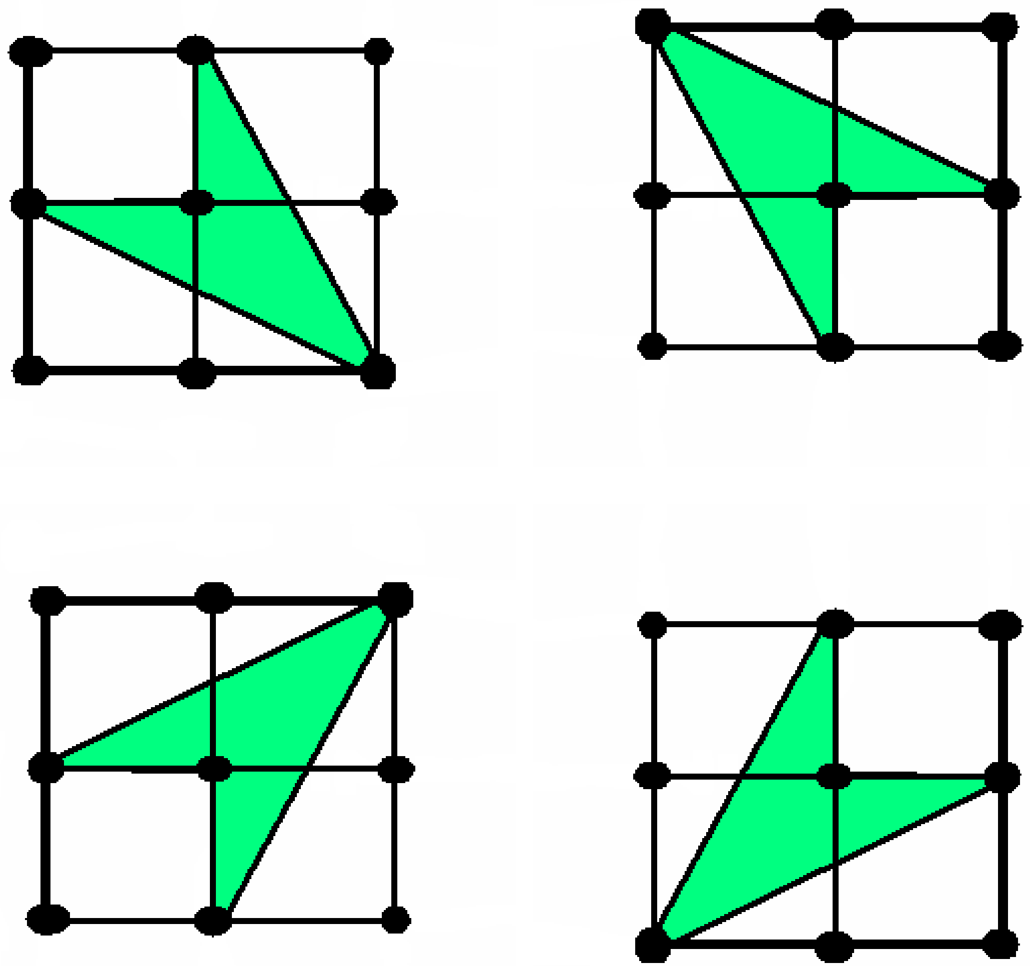


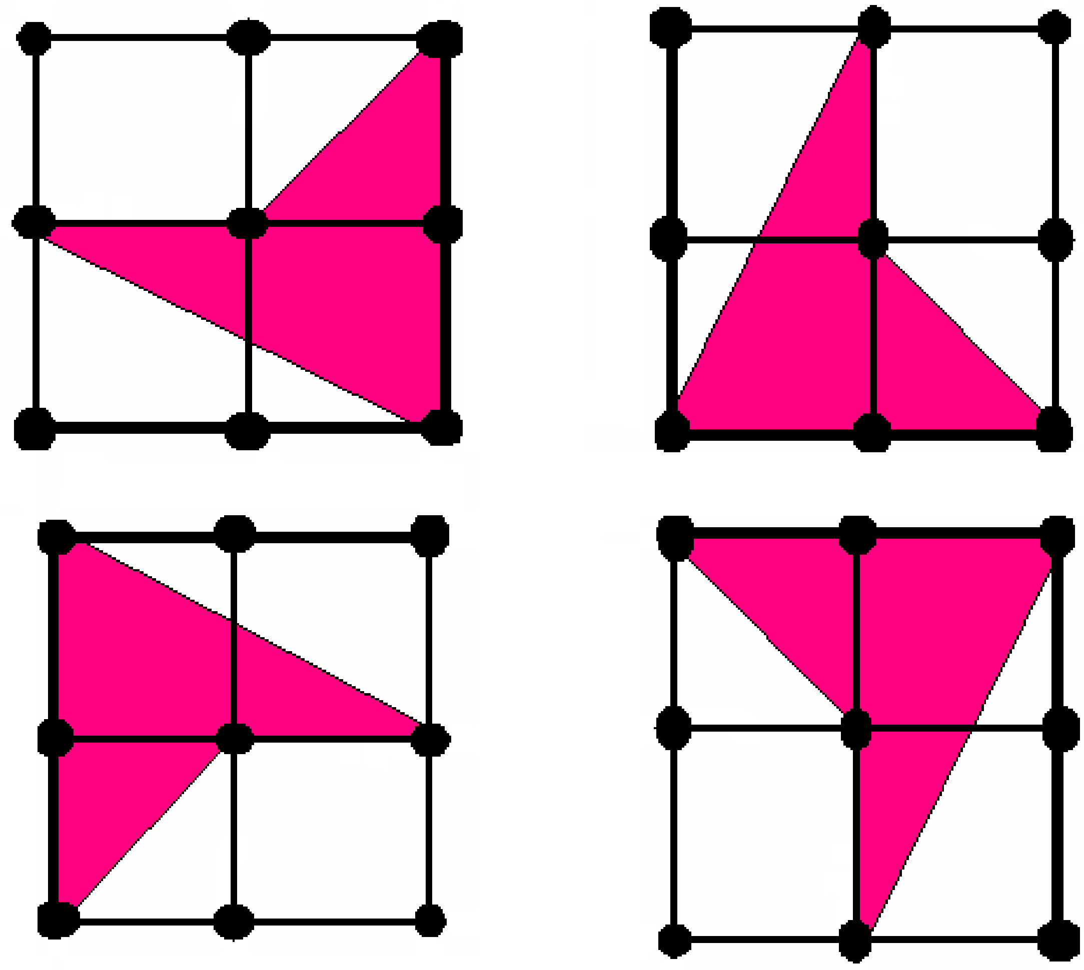


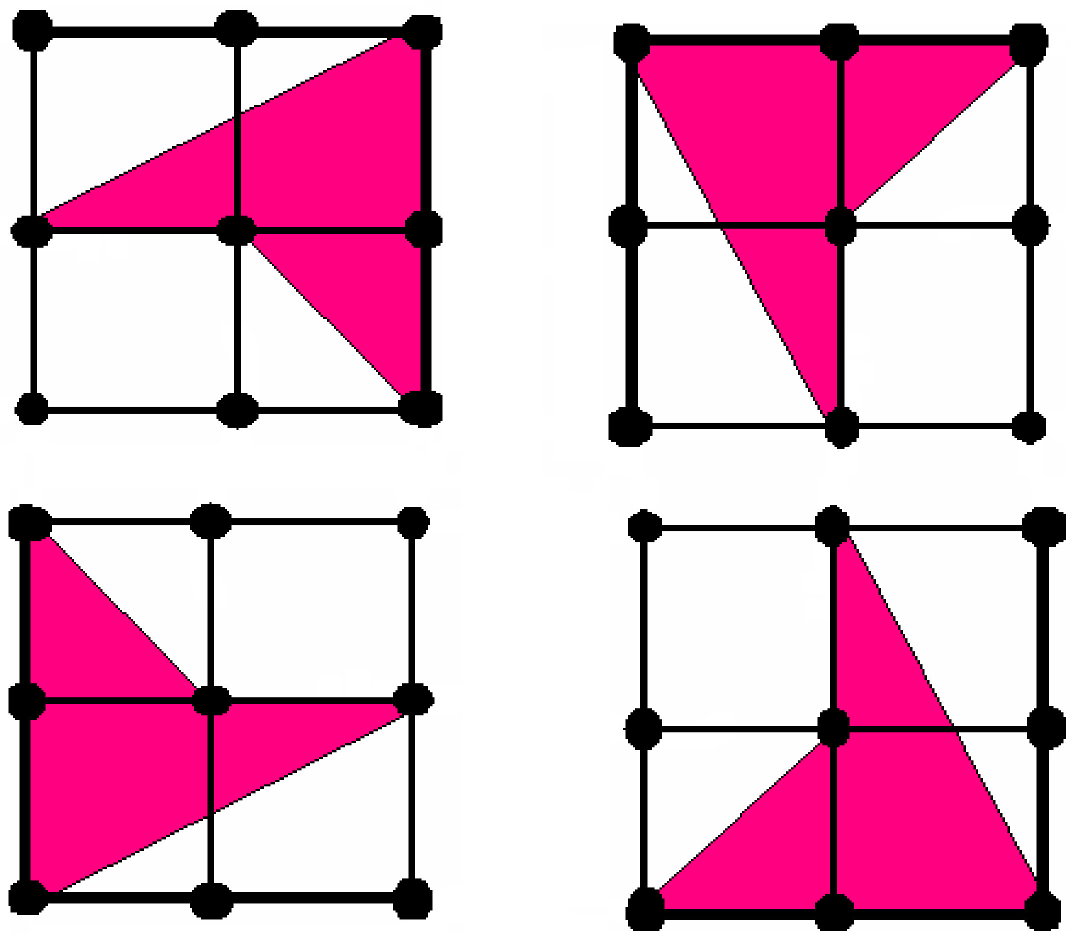
Hledáme všechny možnosti nekonvexních 4- úhelníků v množině.

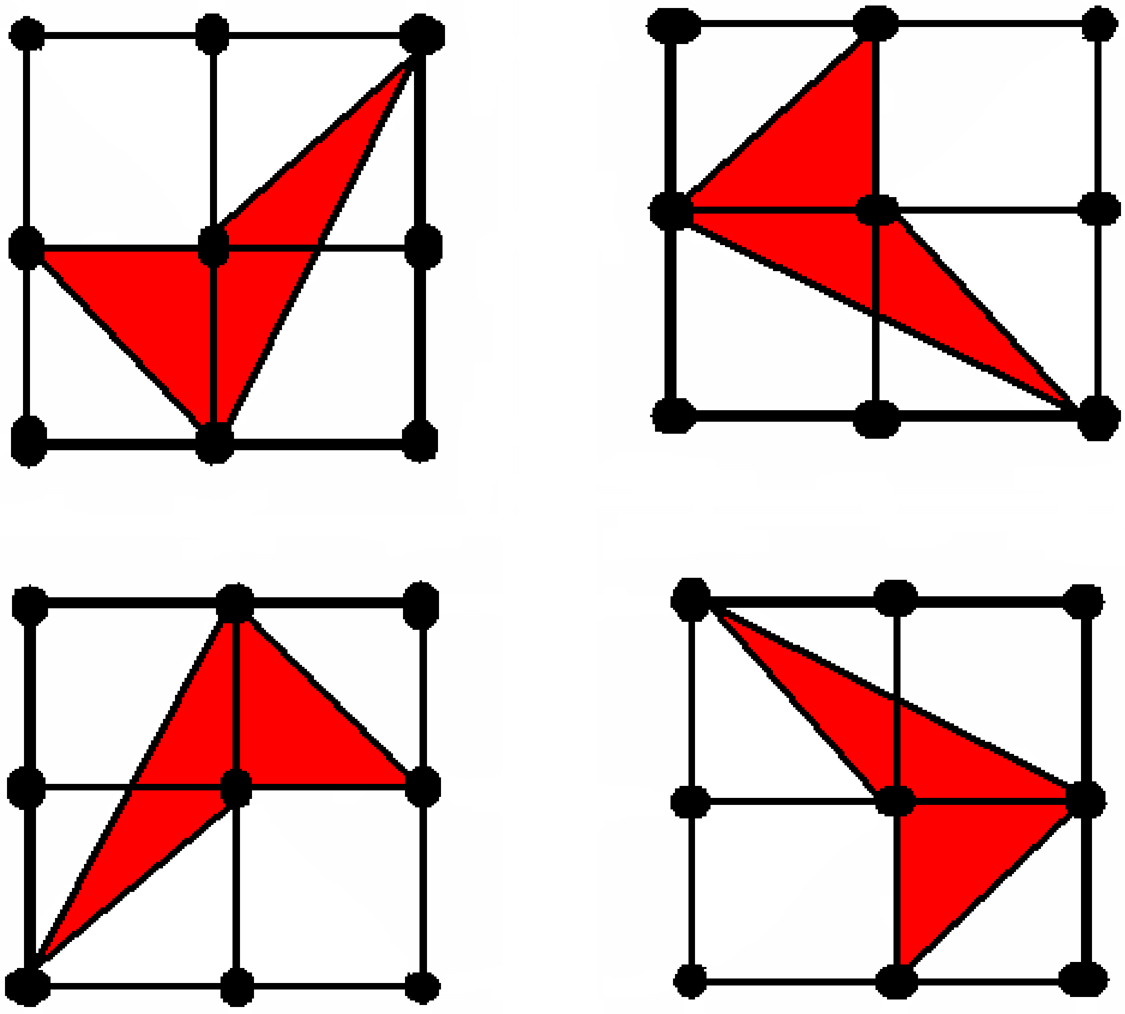


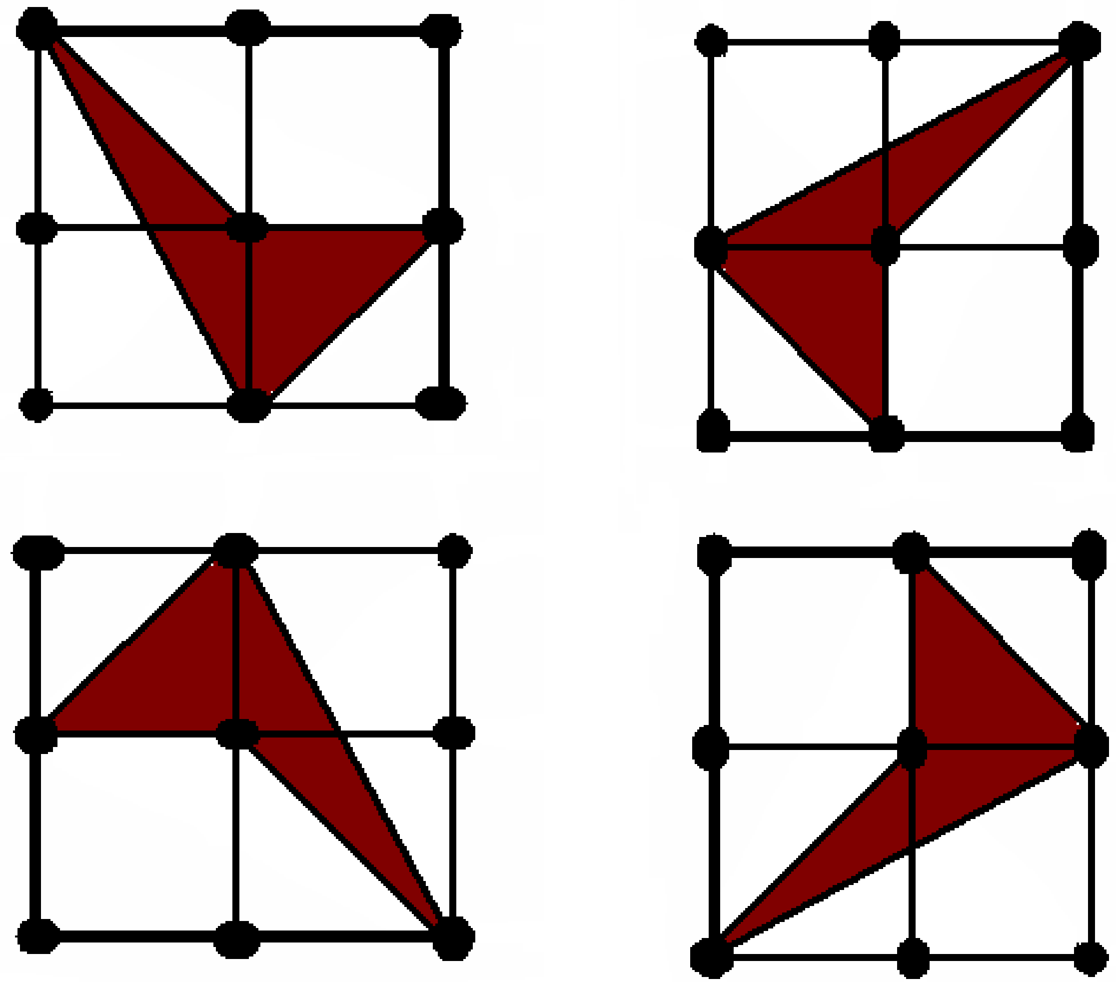

b
2
1
0
1
2
a
b
2
1
0
1
2
a
b
2
1
0
1
2
a
b
2
1
0
1
2
a











Celkový počet nekonvexních čtyřúhelníků: 24

Jaká je pravděpodobnost, že 4 body tvoří nekonvexní 4-úhelník?

$$P = \frac{24}{126} = 19\%$$

Kvantifikátory v úlohách

Problém 25

Házíme třemi mincemi. V kolika případech nám může padnout:

a)aspoň jednou rub

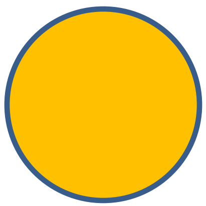
b)nejvýše jednou rub

c)právě jednou rub

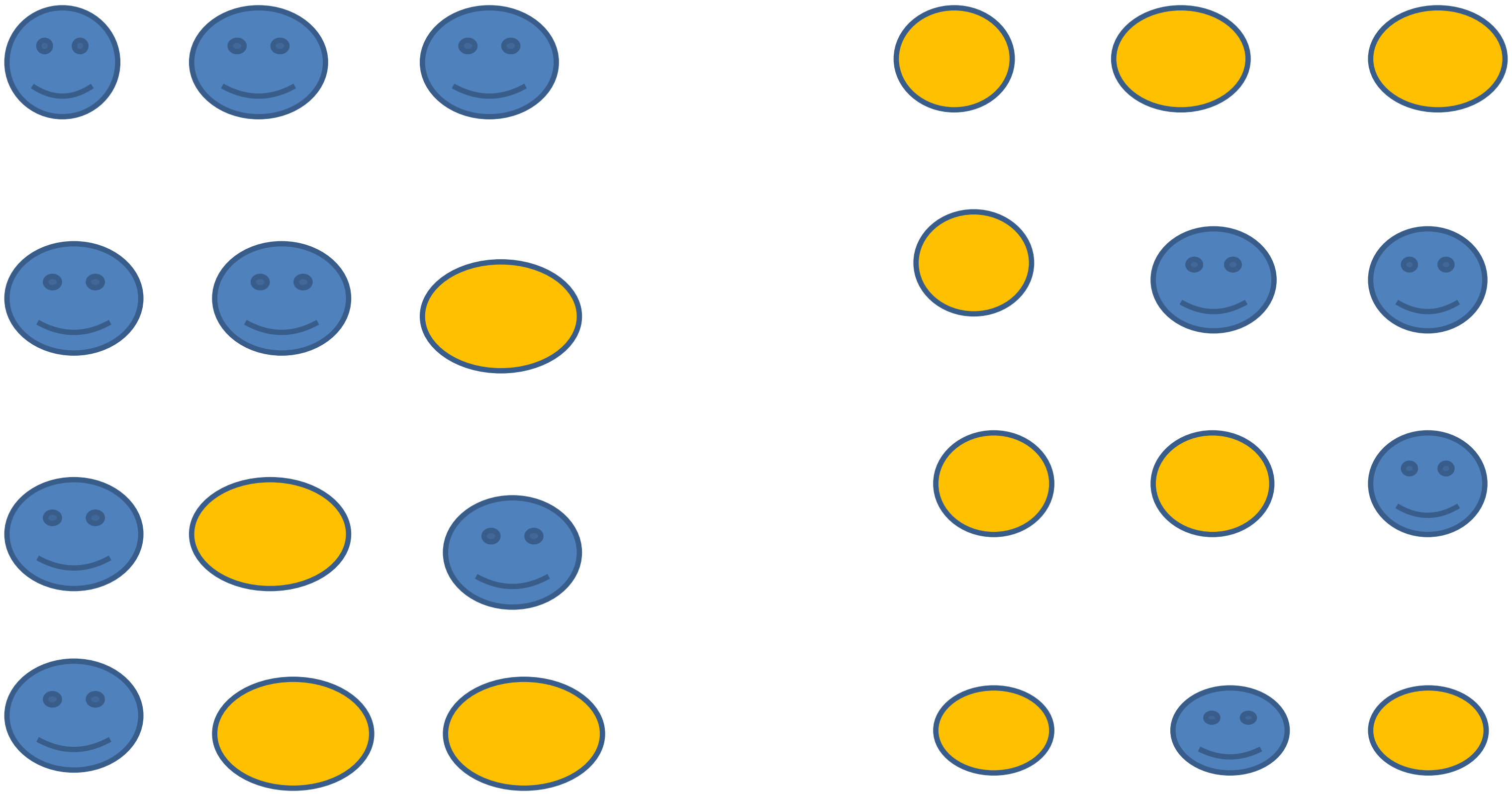
1/ Řešení názorem

- Děti si do školy přinesou 3 mince(lze i papírové mince, které bývají součástí učebnic, zde využíváme dětem známý obrázek „smajlíka“)
- Nejprve si s dětmi ukážeme rub a líc mince.
  - Líc mince

  - Rub mince



Kolik je tedy různých možností uspořádat tři mince?

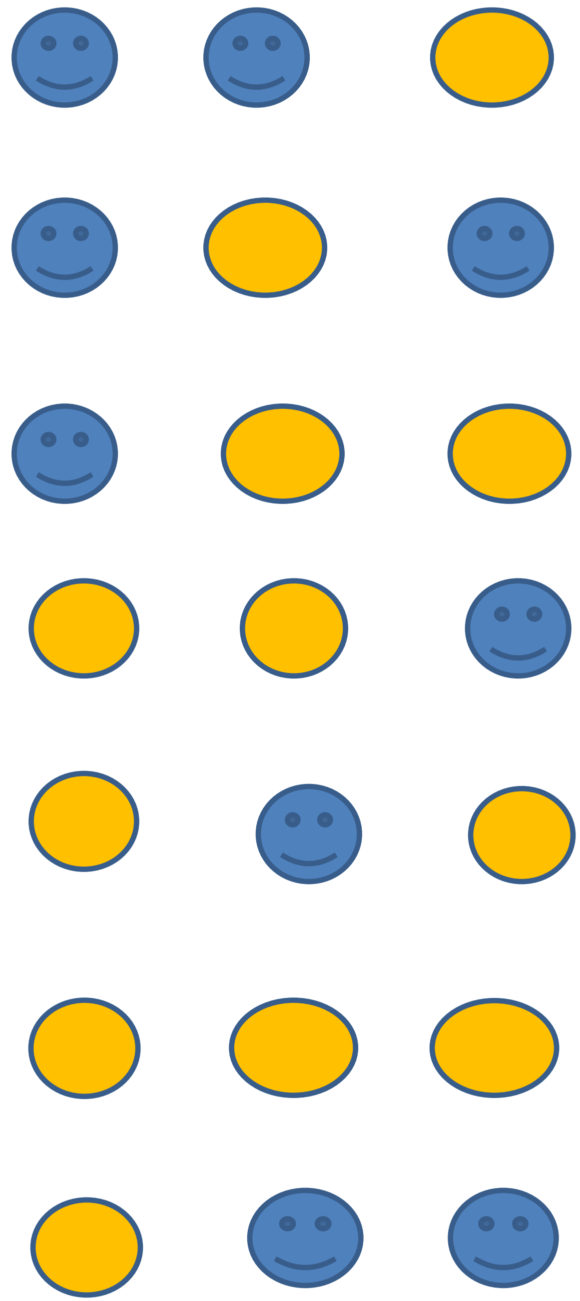


8 možností

Kolik je možností, že padne alespoň 1 krát rub?

Alespoň jeden nám v matematice říká, že rub padne jeden krát, dvakrát či vícekrát.

Proto je 6 možností.

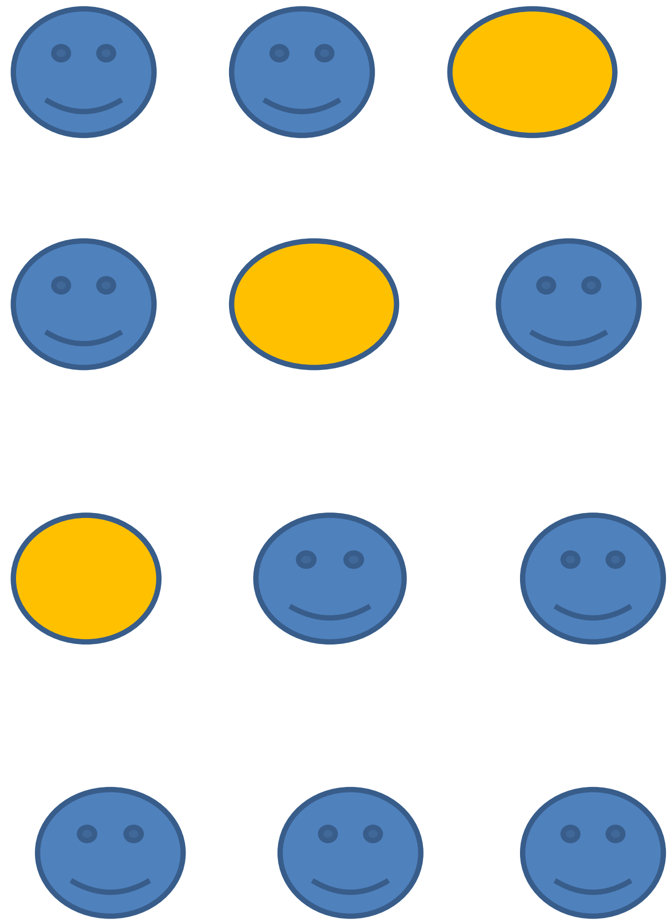


Kolik je možností, že padne nejvýše jedenkrát rub?

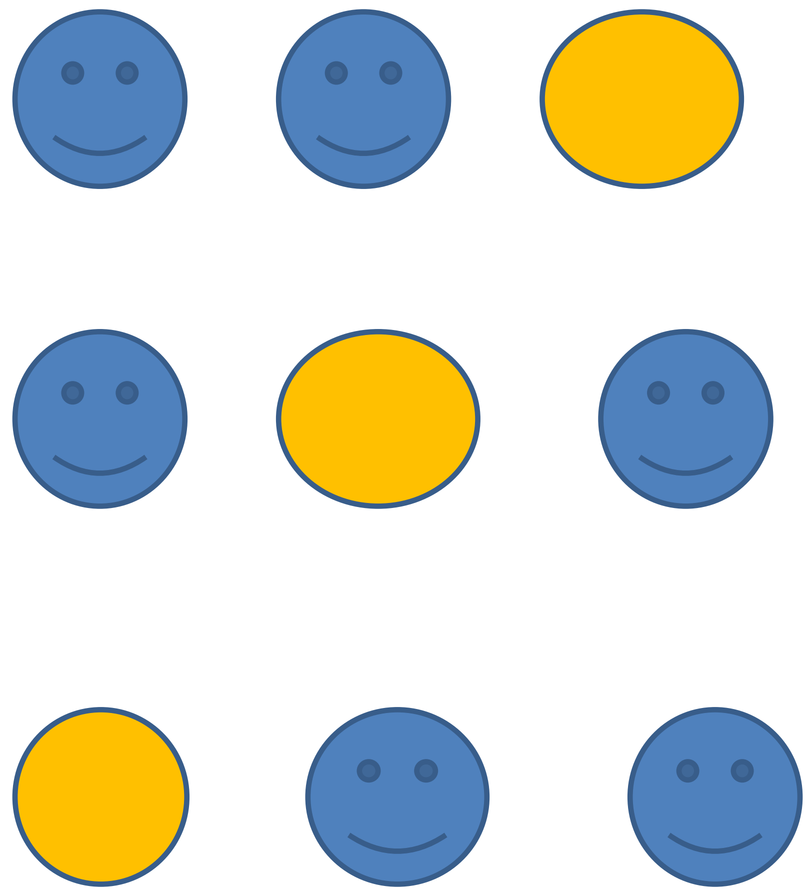
Protože v matematice nám slovíčko NEJVÝŠE vyjadřuje, že padne jednou, ale také že rub padnout nemusí. Rub nejvýše jednou padne 3krát, ale nemusí padnout ani jednou

(1 možnost).

Proto jsou 4 možnosti.



Děti, kolik je možností, že rub padne ***právě*** **1krát?**



Slovíčko PRÁVĚ nám označuje, že je opravdu jen jeden.

Ano, to jsou 3 možnosti.

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

„Milí studenti,
abyste si nemysleli, že kombinatoriku v běžném životě nepotkáte, uvedu vám, nejen pro pobavení, příklad ze života.“

Ženská kombinatorika (aneb nemám co na sebe)

Ženská kombinatorika, obdobně jako ženská logika, vychází z matematické disciplíny rozšířené o několik dalších, klasické matematice neznámých, pouček. Přibližme si ženskou kombinatoriku na příkladu:

Řekněme, že nebožačka má pracovní schůzku a chce být za šmrncovní babu. K dispozici má troje punčocháče, tři v tomto ročním období použitelné sukně (kdo by to byl řekl a tři slušná trička. Předpokládáme-li, že nebožačka má všech pět pohromadě a chce si vzít právě jedny punčocháče s jedním tričkem a sukní, nabízí takto definovaný šatník dvacet sedm možných kombinací. To není tak špatné, že?

Jenže tady do toho vstupuje ženský prvek:

1. Jedny punčocháče jsou proužkaté a jedna sukně kostkatá, což kombinaci vylučuje. (zákon o nekombinovatelnosti určitých kostek s určitými pruhy).
   Šup tři kombinace pryč.
2. Ty proužkaté punčocháče jsou navíc hnědé. A to nejde k černé elegantní sukni (pravidlo ladu a skladu)...
   A další tři kombinace fuč.
3. Pak je tu ta oranžová sukně... ta je dobrá, ale na pracovní schůzku by se hodila, leda že by šlo o konkurz na Pipi. A to nejde (koeficient přiměřenosti).
   Pryč s ní i s devíti ji zahrnujícími kombinacemi!
4. A tahle (fialová) kostkovaná sukně se nedá vzít ani s tím růžovým ani s červenobílým tričkem (princip averze barev).
   Milé čtyři kombinace, sbohem...
5. Na tělových punčocháčích se při pokusu o oblečení udělalo oko (Ne-Mehlova věta)...
   Další čtyři kombinace.
6. Takže nám tu zbývá to bílé tričko, které si ... doprčic... po Vánocích vážně vzít nemůžu (zákon o zachování hmoty).
   Tak to jsme o dvě kombinace kratší.
7. A ještě červenobílé tričko a... moment, zdá se mi to, nebo... KOČKY!
   (Pravidlo špinavé kočičí pracky) A teď ještě o dvě.

Podtrženo, sečteno: Máme tu černé punčocháče a černou sukni a k tomu růžové triko → (logický závěr) nemám co na sebe!

(Zdroj: http://shcleeba.blogspot.com)