KOMBINATIRIKA
PRAVDĚPODOBNOST
ZÁKLADY STATISTIKY

Doporučená literatura

Burda, Z. – *Příklady ze statistiky a jejich řešení pro střední školy*.Fortuna, Praha 1997.
Kahounová, J. - Hebák, P.: *Pravděpodobnost pro začátečníky*. Praha, SPN 1970.
Likeš, J. - Machek, J.: *Matematická statistika*. Praha, SNTL 1983.
Likeš, J. - Machek , J.: *Počet pravděpodobnosti*. Praha, SNTL 1981.
Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha, SPN 1991.
Plocki, A.-Tlustý, P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Prometheus, Praha 2007.
Plocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nás - počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem 2001.
Příhonská, J.: *Úvod do kombinatoriky*. Tribun EU s r.o. Brno 2008, ISBN 978-80-7399-456-3.
Müllerová, J. - Müller, P.: *Finanční matematika a statistika*. Praha, Fortuna 1996.
Vzdělávací program Základní škola. Praha, Fortuna 1996.

P 1 ZÁKLADNÍ POJMY KOMBINATORIKY

Vybíráme k prvků z daných n prvků konečné množiny $\mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N})$ všech přirozených čísel a tvoříme (ne)uspořádané k-tice.

K nalezení všech možností využíváme základních pravidel kombinatoriky

- ***kombinatorické pravidlo součtu***
- ***kombinatorické pravidlo součinu***
- ***permutace***, ***variace***, ***kombinace***
- výpis všech možností (***tabulkové schéma***, ***logický strom možností***)
- využití některých prostředků z ***teorie grafů*** – grafické zpracování

1.1 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČTU

Množina A_1 ... n_1 prvků

Množina A_2 ... n_2 prvků,

…

Množina A_k ... n_k prvků

Každé dvě z množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou disjunktní

$A_i \cap A_j = O$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, k$,

počet všech prvků sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

$$n_1 + n_2 + \ldots n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

1.2 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

A_1 ... n_1 prvků

A_2 ... n_2

...

A_k ... n_k

Počet všech možných uspořádaných k-tic, jejichž první složkou je libovolný prvek množiny A_1, druhou složkou libovolný prvek množiny A_2, …, k-tou složkou libovolný prvek množiny A_k, je roven součinu

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Příklad 1: Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel takových, v nichž se nevyskytuje stejná číslice?

Řešení 1a:

Dvojciferná čísla … 10 až 99 … celkem 90
(odečetli jsme 9 jednociferných čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9).
Odečteme dalších 9 (to jsou čísla 11, 22,…, 99)

90 - 9 = 81.

➤ ***Poznámka***

U prvního řešení lze vypozorovat ***kombinatorické pravidlo součtu***

Množina A_1...všechna jednociferná čísla.

Počet prvků této množiny je $n_1 = 9$ (čísla 1 až 9 - nulu nepočítáme)

Množina A_2 ... množina všech dvojciferných čísel

Počet prvků A_2 je $n_2 = 90$ (čísla 10 až 99).

$A_1 \cup A_2$ je množina všech dvoj nebo jednociferných čísel. Pro počet jejích prvků 99 (čísla 1 až 99)
platí 99 = 90 + 9, a to je právě kombinatorické pravidlo součtu. ➤

Řešení 1b:

Kolika různými číslicemi může takové dvojciferné číslo začínat?
O: Zřejmě devíti číslicemi (jsou to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9).

Kolika může pokračovat? Mohlo by sice pokračovat deseti číslicemi (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9), ale pokud chceme jen čísla, ve kterých se neopakují číslice, můžeme použít všechny číslice kromě té, která je na prvním místě. Použít tedy můžeme 9 číslic.

Celkový počet dvojciferných čísel je $9 \cdot 9 = 81$.

➤***Poznámka***
Z druhého řešení můžeme vypozorovat ***kombinatorické pravidlo součinu***. ◄

V našem příkladu jsme chtěli utvořit uspořádanou dvojici (k = 2). Pro první cifru jsme měli na výběr z devíti číslic, pro druhou cifru taktéž z devíti.

Celkový počet uspořádaných dvojic je 9 · 9 = 81.

1.3 PERMUTACE

1.3.1 PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Permutace je vlastně obměna pořadí.

Pro zobecnění počtu permutací z n prvků použijeme kombinatorické pravidlo součinu.

Chceme sestavit uspořádanou n-tici, přičemž máme k dispozici celkem n prvků.

Otázka: z kolika prvků máme na výběr pro první člen n-tice?

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Počet permutaci z n prvků ... $P(n)$ nebo P_n

$P(n) = n!$ (***faktoriál*** čísla n)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$ pro každé $n \in \mathrm{N}$.

0! = 1.

Aby se faktoriál nestal jen pojmem, ukažme si několik prvních faktoriálů:

0! = 1
1! = 1
2! = 2 · 1 = 2
3! = 3 · 2 · 1 = 6
4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24
5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120
6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720
7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5 040
……………………………….

Příklad 2: *Mějme 6 různých závodních aut, označme si je například A, B, C, D, E, F. Jaký je:*

a) počet všech možných pořadí, v nichž auta projedou cílem?
b) počet všech možných pořadí, v nichž auto A projede cílem dříve než B?
c) počet všech možných pořadí, v nichž auto B přijede hned po autu A?

Řešení:

a) Jedná se o permutaci ze šesti prvků, které se neopakují. Počet všech možných pořadí je P(6) = 6! = 720.

b) Rozdělme si všechna pořadí do dvou skupin.

První skupina: A před B … P(6)
Druhá skupina: B před A. … P(6)

Každému pořadí z první skupiny odpovídá právě jedno pořadí z druhé skupiny takové, že prohodíme A a B, takže tyto skupiny jsou stejně velké. Odtud je jasné, že počet hledaných možností je 1/2 · P(6) = 6! / 2 = 360.

c) Úvaha: Auta A, B musí projet bezprostředně po sobě, takže je to totéž, jakoby závodilo jen jedno auto AB … P(5) = 5! = 120.

Příklad 3: *Mějme n různobarevných korálků, které budeme navlíkat na niť. Její konce poté svážeme, takže dostaneme kruh (něco jako náhrdelník). Kolika způsoby lze korálky do kruhu uspořádat? (Uspořádání, které se liší jen otočením kruhu, nepovažujeme za různé).*

Řešení:

Nejdříve určíme počet všech uspořádání. Tedy jako bychom korálky navlíkali do řady, nikoli do kruhu. Těch je n! Ovšem několik uspořádání je v kruhu shodných.

Proveďme následující úvahu. Uvažujme nějaké uspořádání v kruhu a zvolme si libovolný korálek, o kterém prohlásíme, že je první a ostatní korálky očíslujeme třeba ve směru hodinových ručiček. Teď celé uspořádání pootočíme ve směru hodinových ručiček o jeden korálek (takže první se dostane na místo druhého, druhý na místo třetího, atd.), čímž dostaneme shodné uspořádání.

Takto můžeme uspořádání pootočit n-krát a vždy dostaneme shodné uspořádání. Když jsme ale korálky navlíkali do řady, všechna tato shodná uspořádání jsme započítali. Výsledek tedy je

$$\frac{n!}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n}=(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=(n-1)!$$

Pro názornost ještě uvedeme shodná uspořádání v kruhu pro čtyři korálky:

12	41	34	23
43	32	21	14

1.3.2 PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Permutace k prvků s opakováním z daných n prvků je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní některé ze zvolených prvků mohou opakovat, přičemž platí, že 1. prvek se opakuje k_1-krát, 2. prvek se opakuje k_2-krát, atd. až n-tý prvek se opakuje k_n-krát.

Počet těchto permutací znamená, kolik různých k-tic lze takto utvořit. Značíme ho $P'_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(k)$ a počítáme podle následujícího vzorce

$$P'_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(k)=\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\ , \tag{1.4}$$

přičemž pro k_i platí $\sum_{i=1}^{n}k_i=n$.

Odvození:

Mějme pět různých prvků a_1, a_2, b_1, b_2, b_3

Utvořme z nich všech 5! permutací.

Zkoumejme, kolik z těchto permutací se ztotožní, jestliže u všech pěti prvků odstraníme index, tj. položíme-li $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b_3=b$.

Které permutace z prvků a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 se po odstranění indexu ztotožní např. s permutací (b, a, b, b, a)? Zřejmě to budou permutace:

(b_1,a_1,b_2,b_3,a_2) (b_1,a_2,b_2,b_3,a_1)
(b_1,a_1,b_3,b_2,a_2) (b_1,a_2,b_3,b_2,a_1)
(b_2,a_1,b_1,b_3,a_2) (b_2,a_2,b_1,b_3,a_1)
(b_2,a_1,b_3,b_1,a_2) (b_2,a_2,b_3,b_1,a_1)
(b_3,a_1,b_1,b_2,a_2) (b_3,a_2,b_1,b_2,a_1)
(b_3,a_1,b_2,b_1,a_2) (b_3,a_2,b_2,b_1,a_1)

Je vidět, že jsou to právě ty permutace, v nichž jsou prvky a_1, a_2 na místech druhém a pátém a prvky b_1, b_2, b_3 na místech prvním, třetím a čtvrtém.

Pro umístění na těchto místech však máme pro prvky a_1, a_2 právě 2! a pro prvky b_1, b_2, b_3 právě 3! možností, takže v souladu s uvedeným výčtem splyne s permutací (b, a, b, b, a) celkem 2!·3!=12 původních permutací z pěti prvků a_1, a_2, b_1, b_2, b_3.

Tímto způsobem se všech 5! permutací rozloží do skupin (resp. tříd) tak, že v každé třídě budou právě ty permutace, které se po odstranění indexu u daných prvků ztotožní.

A protože každá tato třída odpovídá jediné permutaci s opakováním ze dvou prvků a a tří prvků b, a protože má 2!·3! členů, platí pro jejich počet $P'_{2,3}(5)$ vztah

$$\mathrm{P}'_{2,3}(5) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \qquad \text{neboli} \qquad \mathrm{P}'_2(3) = \frac{(2+3)!}{2!\cdot 3!}\ .$$

Jestliže tuto úvahu zobecníme dostaneme vztah (1.4)

$$\mathrm{P}'_{k_1,k_2,\dots,k_n}(k) = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}, \quad \text{kde } k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\ .$$

Příklad 4: *Kolik anagramů (tj. slov vzniklých přeskupením písmen výchozího slova) lze vytvořit ze slova PRAHA?*

$$\mathrm{P}'_{2,1,1,1}(5) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

1.4 VARIACE

1.4.1 VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Variace je, podobně jako permutace, obměna pořadí.

Vybíráme k prvků ve stanoveném pořadí z daných n prvků.

Každý prvek se ve variaci vyskytuje nejvýše jednou.

Permutace je speciální případ variace kdy $k = n$.

Požadavek: $k \leq n$

$k > n$ … nelze

(Zkuste vytvořit ze tří číslic pěticiferné číslo, kde se žádná cifra nesmí opakovat).

Dále se budeme zabývat případem, kdy $k \leq n$.

Zjistíme počet všech k-členných variací …kombinatorické pravidlo součinu.

Ptáme se:

Z kolika prvků máme na výběr pro první člen k-tice? … všech n prvků.

Z kolika prvků máme na výběr pro druhý člen k-tice? … všechny kromě první: (n-1)

Z kolika prvků máme na výběr pro třetí člen k-tice? … (n-2) prvků.

A z kolika prvků máme na výběr pro poslední k-tý člen k-tice? … [n - (k-1)] prvků.

uspořádaná k-tice	1. člen	2. člen	…	(k-1)-ní člen	k-tý člen
počet možností výběru z n prvků	n	n -1		n - (k -2)	n - (k -1)

Počet k-členných variací z n prvků: podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných k-tic roven

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pro počet k-členné variace bez opakování z n prvků byl zvolen symbol $V(k,n)$ nebo též $V_k(n)$

Definice:
k-členná variace z n prvků $(k, n \in N, k \leq n)$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (tj. neopakují se).

Počet všech takových variací $V(k,n)$ určíme dle vzorce

$$V(k,n)=V_k(n)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

nebo $$V(k,n)=V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_n(n) = P(n) = n! / (n - n)! = n! / 0!,$$

přitom ale víme, že $P(n) = n!$. Proto jsme definovali $0! = 1$

Příklad 5: *Máme k dispozici pět barev (modrá, bílá, červená, žlutá a černá) a chceme z nich vytvořit trojbarevnou vlajku, která je složená ze tří vodorovných pruhů (podobně jako ruská, německá, maďarská, lucemburská či ázerbájdžánská). Navíc chceme, aby každý pruh měl jinou barvu (rakouská vlajka nepřipadá v úvahu).*

a) Kolik takových vlajek můžeme sestavit?
b) Kolik z nich má bílý pruh?
c) Kolik z nich má bílý pruh uprostřed?
d) Kolik z nich nemá bílý pruh?

Řešení

a) Jedná se o trojčlennou variaci z pěti prvků, všech možností tedy je

$$V(3,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 .$$

b) Ze zbylých barev můžeme vybrat vždy dvojici, kterou pak doplníme bílou barvou.

Těchto dvojic je

$$V(2,4) = 4 \cdot 3 = 12 .$$

Bílá barva… 3 možnosti umístění – nad, mezi nebo oba pruhy … $3 \cdot V(2,4) = 36$.

c) viz … bílou barvu doplnit mezi dvojici barev … 12 možností

d) Kombinatorické pravidlo součtu

Počet vlajek bez bílé barvy … x.

Počet vlajek bez bílé barvy + počet vlajek s bílou barvo = 60

$x + 36 = 60$,

odkud $x = 24$,

1.4.2 VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Definice:
k-členná variace s opakováním z n prvků je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat).

$$\mathrm{V}'_k(n) = n^k$$

1.5 KOMBINACE

Nezáleží na pořadí prvků

Např.: alpská kombinace (sjezd, slalom a obří slalom)

1.5.1 KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Definice:
k-členná kombinace bez opakování z n prvků je každá neuspořádaná k-tice (množina k prvků) vybraná z daných n prvků. V množině se žádné prvky neopakují (každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou).

$k \leq n$ … není nezbytné

$$\mathrm{K}(k,n) = \frac{\mathrm{V}(k,n)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

neboli $$\mathrm{K}(k,n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

➤ ***Poznámka***

Symbol $\binom{n}{k}$ čteme „*n* nad *k* " a nazýváme ho ***kombinačním číslem***. Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0, k \le n$ platí: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. ➤

Odvození ve skriptech.

Příklad 6

Ze šesti kandidátů je třeba vybrat do komise tři. Kolika způsoby je to možné?

Řešení

Ze šesti prvků dané množiny kandidátů máme vybrat tři prvky, přičemž nezáleží na pořadí. Tvoříme tříčlenné kombinace ze šesti prvků, jejichž počet je

$$K_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

1.5.1.1 Základní vlastnosti kombinačních čísel

Pro každé $k, n \in N_0$, $k \le n$ platí následující vzorce (a), (b):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{a}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \tag{b}$$

Příklady na výpočet kombinatorického čísla s užitím uvedených vztahů (a) a (b):

viz (a): $$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \frac{1320}{6} = 220$$

viz (b): $$\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

Kombinační čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, lze zapsat do trojúhelníkového schématu, zvaného **Pascalův trojúhelník**.

K odvození Pascalova trojúhelníka využijeme další vlastnosti kombinačních čísel. Pro každé celé číslo k a reálné číslo x platí

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\binom{x+1}{k+1}$$

Z této definice binomických koeficientů plyne platnost následující rekurentní formule: Pro $n,k \in N,\ k \le n$ platí vztah (c)

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}, \qquad \text{(c)}$$

přičemž $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

Ilustrační příklad pro využití vztahu (c):

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{8+1}{3+1}=\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{3024}{24}=126$$

Vztah (c) umožňuje postupně počítat hodnoty $\binom{n}{k}$ v Pascalově trojúhelníku.

Pascalův trojúhelník je geometrické uspořádání těchto binomických koeficientů.

V praxi využitelné schéma má pak obvykle následující tvar:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}$$

resp.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

1.5.2 KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

Definice: k-členná kombinace s opakováním z n prvků $(k, n \in \mathbf{N})$ je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat).

Počet všech takových kombinací s opakováním

$$\mathrm{K}_k^{'}(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Odvození: Obecný postup si ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad 7

Kolik částek můžete zaplatit třemi mincemi, máte-li v peněžence korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince?

Řešení – viz skripta

Jde o určení počtu všech tříčlenných kombinací s opakováním ze tří prvků 1, 2, 5. Každou tuto kombinaci zašifrujeme pomocí uspořádané skupiny koleček a lomítek takto: Mysleme si, že máme tři přihrádky – první pro exemplář prvků 1, druhou pro exemplář prvku 2 a třetí pro exemplář prvku 5. Rozhraní mezi sousedními přihrádkami jsou znázorněna lomítkem (potřebujeme dvě lomítka: pro rozhraní mezi 1. a 2., přihrádkou a pro rozhraní mezi 2. a 3. přihrádkou). Pro každý z daných prvků zakreslíme do příslušné přihrádky tolik koleček, kolikrát se v dané kombinaci tento prvek vyskytuje; nevyskytuje-li se v ní, zůstane příslušná přihrádka prázdná.

Ilustrace: [koruny / dvoukoruny / pětikoruny] , např. [/ • • / •] představuje 0 x 1Kč; 2 x 2Kč; 1 x 5Kč. Tímto způsobem získáme následující možnosti:

3 Kč:	1, 1, 1	[• • • / /]
4 Kč:	1, 1, 2	[• • / • /]
7 Kč:	1, 1, 5	[• • / / •]
5 Kč:	1, 2, 2	[• / • • /]
8 Kč:	1, 2, 5	[• / • / •]
11 Kč:	1, 5, 5	[• / /• •]
6 Kč:	2, 2, 2	[/• • • /]
9 Kč:	2, 2, 5	[/ • • / •]
12 Kč:	2, 5, 5	[/ • / • •]
15 Kč:	5, 5, 5	[/ / • • •]

Kombinace je neuspořádaná, např. [• • • / /] je stejné jako [/ / • • •], ale permutace je uspořádaná: 3Kč a 15Kč není totéž.

Je vidět, že každé tříčlenné kombinaci s opakováním ze tří prvků 1, 2, 5 odpovídá jediná uspořádaná pětice o třech tečkách a dvou čárkách a také obráceně. To však znamená, že počet $K'_3(3)$ těchto kombinací s opakováním je roven počtu permutací s opakováním ze dvou prvků z nichž jeden se opakuje třikrát a druhý dvakrát, tj. že platí

$$\mathrm{K}'_3(3)=\mathrm{P}'_{3,2}(5)=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

Půjde-li obecně o *k*-členné kombinace s opakováním z *n* prvků, přiřadíme stejným způsobem každé kombinaci uspořádanou skupinu s tečkami a (*n*-1) lomítky, tj. obecně permutace s opakováním ze dvou prvků, přičemž platí, že jeden se opakuje *k*-krát a druhý (*n*-1)-krát. Protože toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, platí

$$\mathrm{K}'_k(n)=\mathrm{P}'_{k,(n\text{-}1)}(n+k-1)=\frac{\left[k+(n-1)\right]!}{k!\cdot(n-1)!}=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n\text{-}1)!}$$

Uvědomíme-li si, že

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n\text{-}1)!}=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot\left[(n+k\ \text{-}1)-k\right]}=\binom{n+k-1}{k}$$

dostaneme vztah (1.12) pro výpočet $K'_k(n)$.

Příklad 8

V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišené. Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je aspoň pět kuliček od každé barvy.

Řešení

V pětici kuliček, které vybíráme, nezáleží na pořadí a barvy kuliček se v ní mohou opakovat. Jde tedy o 5-ti člennou kombinaci s opakováním ze tří prvků. Je možné utvořit všechny možné pětice ze tří barev, neboť kuliček od každé barvy je dostatečné množství, tj. pět. Počet všech způsobů výběru je

$$K'_5(3) = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

Příklad 9

V prodejně mají na výběr z 12 různých pohlednic. Určete, kolika způsoby si z nich lze vybrat 7 pohledů.

Řešení:

Jedná se o sedmičlennou kombinaci s opakováním ze dvanácti prvků (mohu si koupit 7 různých pohledů, nebo i některé stejné!):

$$K'_7(12) = \binom{12+7-1}{7} = \binom{18}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 31\,824$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

PROBLÉM 1

Kolika různými způsoby při pohybu pouze dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK (viz Obr. PT1)?

```
O B R Á Z E K
B R Á Z E K
R Á Z E K
Á Z E K
Z E K
E K
K
```

Obr. PT1

<u>Řešení:</u>

↓, →.

Sečteme-li všechny získané hodnoty u posledního písmene **K**, dostaneme celkový počet možností: 1 + 6 +15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64, tj. 2^6 možností.

```
        →
↓ •1  •1  •1  •1   •1   •1  •1
  •1  •2  •3  •4   •5   •6
  •1  •3  •6  •10  •15
  •1  •4  •10 •20
  •1  •5  •15
  •1  •6
  •1
```

Obr. PT1a

Uvedený problém je možno dále modifikovat a měnit slova či schémata, se kterými pracujeme.

Kolika různými způsoby při pohybu od písmene k písmeni je možné přečíst slovo KRUH, ČTVEREC, MAMINKA?

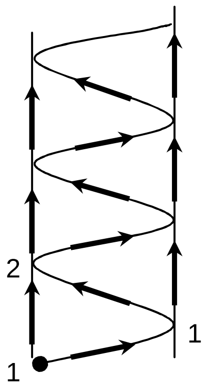
```
      H
    H U H
  H U R U H
H U R K R U H
  H U R U H
    H U H
      H
```

```
            C
          C E C
        C E R E C
      C E R E R E C
    C E R E V E R E C
  C E R E V T V E R E C
C E R E V T C T V E R E C
            T V E R E C
            V E R E C
            E R E C
            R E C
            E C
```

```
A
K A
N K A
I N K A
M I N K A
A M I N K A
M A M I N K A
A M I N K A
M I N K A
I N K A
N K A
K A
A
```

PROBLÉM 2 - Hledání počtu cest od startu k cíli uvedené trasy

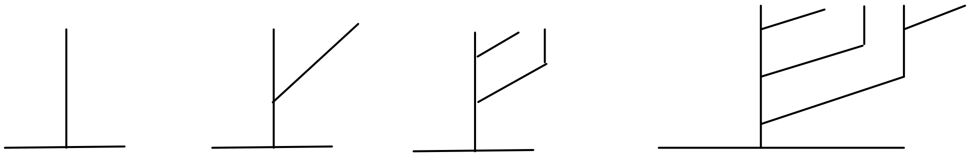
Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny – cesta se samými zatáčkami, doprava, doleva, potom zase doprava a zase doleva a tak dále (viz Obr. PT2). Z míst, v nichž se serpentiny ohýbají, můžeme na výstupu pokračovat i přímou cestou. Komu prudké stoupání nevadí, může si cestu občas zkrátit.



Obr. PT2 Schéma plánku

Problém ukazuje při svém vyřešení na souvislost mezi čísly jako u *Fibonacciho posloupnosti*.

“Podivný strom Fibonacciho” roste podle daného pravidla: vždy v příštím roce každá boční větev začne růst směrem vzhůru; z větví, které v předcházejícím (minulém) roce rostly směrem vzhůru, vyroste vždy v příštím roce nová boční větev. Princip narůstání ukazuje Obr. PT2a*:*

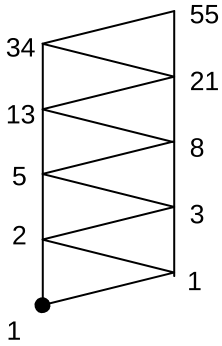


1. rok **2. rok** **3. rok** **4. rok**

Obr. PT2a Počet větví Fibonacciho stromu

Počet větví v jednotlivých letech tvoří posloupnost: 1, 2, 3, 5, …

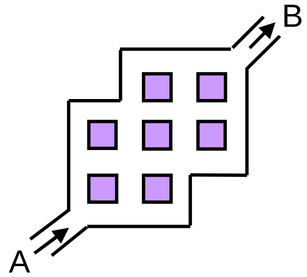
Řešení:



Pro zjišťování čísla, které se připíše k dalšímu rozcestí, si můžeme pomoci jednoduchým překreslením plánku. Po připsání číselných hodnot, vyjadřujících počet možných cest, kterými se do daného místa dostaneme, získáme graf na Obr. PT2b.

Obr. PT2b Překreslení plánku s řešením

PROBLÉM 3 (převzat z [6])



Obr. PT3 Bludiště

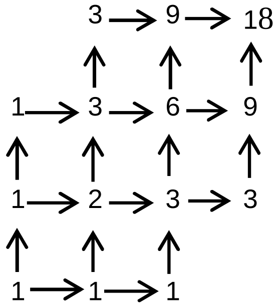
V místě A vběhla do bludiště vyděšená myší rodina (viz Obr. PT3).

Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

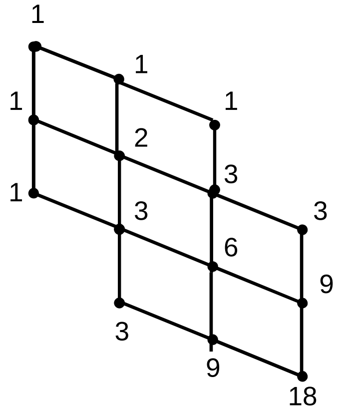
1. *Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.*
2. *Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.*
3. *Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.*

Kolik členů měla myší rodina?

Řešení:



Obr. PT3a Síť bludiště a klíč



Obr. PT3b *h*-diagram

PROBLÉM 4

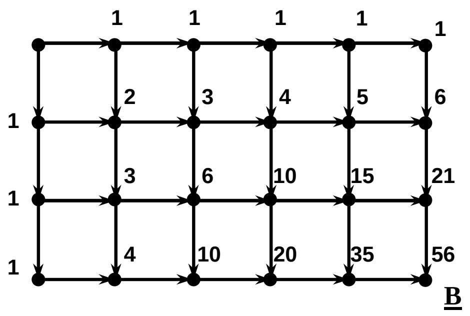
Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít?

Řešení:

Následující schéma zachycuje jeden z možných průběhů zápasu.

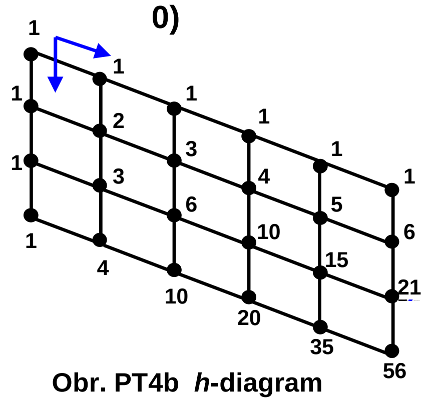
0 : 0	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0	5 : 0
0 : 1	1 : 1	2 : 1	3 : 1	4 : 1	5 : 1
0 : 2	1 : 2	2 : 2	3 : 2	4 : 2	5 : 2
0 : 3	1 : 3	2 : 3	3 : 3	4 : 3	5 : 3

Na Obr. PT4a,b je uveden graf situace a příslušný *h*-diagram.



Obr. PT4a Graf situace

A … výchozí uzel (stav 0 : 0)

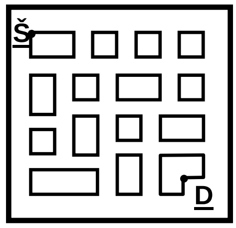


Obr. PT4b *h*-diagram

Uzly odpovídají jednotlivým stavům, šipka znázorňuje přechod z jednoho stavu do druhého. Hledáme počet cest vedoucích do jednotlivých bodů kosočtvercové, resp. kosodélníkové sítě. Směr postupu je dán vyznačenými šipkami. Číslo u uzlu představuje počet dostupných cest.

Odpověď: Počet všech možných průběhů zápasu je 56.

PROBLÉM 5



Plánek na Obr. PT5 zachycuje schematicky rozmístění budov a křižovatek. Při chůzi zleva doprava a shora dolů hledáme počet různých cest z místa <u>š</u>(kola) do místa <u>d</u>(ům).

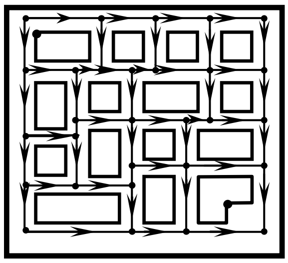
Obr. PT5 Plánek sídliště

<u>Řešení</u>*:*

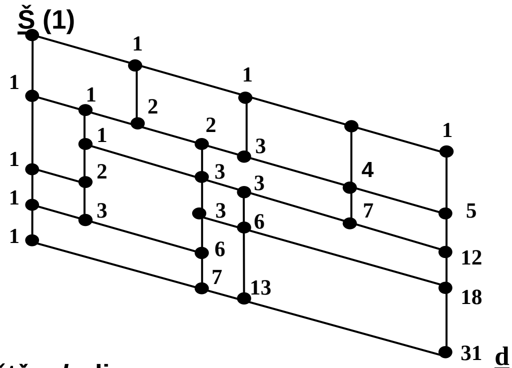
Odpovídající graf je zakreslen přímo v plánku na Obr. PT5a.

K řešení použijeme *h*-diagramu (Obr. PT5b). U každého uzlu je uveden počet cest, které do daného uzlu vedou od **<u>š</u>**koly; celkový počet různých cest je 31. Uzly grafu odpovídají křižovatkám na nákresu sídliště.

a)



b)

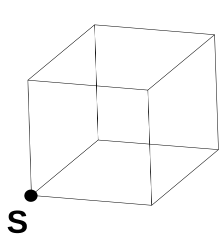


Obr. PT5a,b Graf sídliště a *h*-diagram

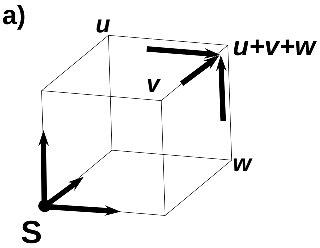
PROBLÉM 6 - Cestování po krychli

Zkoumejte počet nejkratších cest z bodu <u>S</u> do zbývajících vrcholů krychle (Obr. PT6).

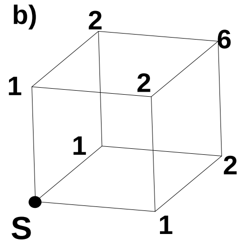
<u>Řešení</u>: Postupujeme podobně jako u Problému 2. Do daného vrcholu se dostaneme prostřednictvím předcházejících, nevracíme se zpět, postupujeme jen ve směru šipek. Sčítáme počet cest, které vedou do vrcholů, z nichž vedou šipky (Obr. PT6



a)



b)



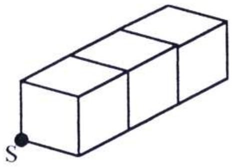
a,b).

Obr. PT6 **Obr. PT6 a,b**

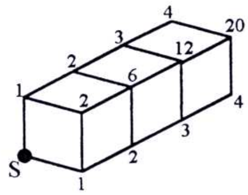
PROBLÉM 7 - CESTOVÁNÍ PO SOUSTAVĚ KRYCHLÍ

Kolik nejkratších cest z bodu S vede do všech viditelných vrcholů tří krychlí? (viz Obr. PT7).

Řešení: je uvedeno na Obr. PT7a.



Obr. PT7

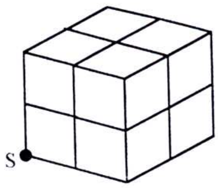


Obr. PT7a

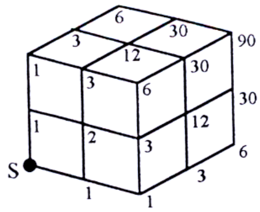
PROBLÉM 8 – CESTOVÁNÍ PO SOUSTAVĚ KRYCHLÍ

Zjistěte počet nejkratších cest z bodu S do všech viditelných bodů (vrcholů) dvou vrstev krychlí (viz Obr. PT8).

Řešení: je uvedeno na Obr. PT8a.



Obr. PT8



Obr. PT8a

➤ ***Poznámka:***

Podobně jako u problémů 1 - 4 je možno počet cest vedoucích mezi dvěma místy po krychlové síti určit pomocí vztahu

$$\mathrm{P}'(p,d,h) = \frac{(p+d+h)!}{p!\cdot d!\cdot h!},$$

kde $p\{d,h\}$ značí počet kroků vpravo {dozadu, nahoru}. ➤

Příklad.

Muž prodávající Večerník (za 5 korun) u sebe nemá na začátku prodeje žádné peníze. Ihned se před ním utvořila fronta m+k lidí, přičemž m lidí má u sebe pouze desetikorunovou minci a k lidí pouze pětikorunu. Kolika způsoby se tito lidé mohou postavit do fronty tak, aby měl prodávající vždy nazpět na desetikorunu?

(Rozlišujeme rozestavení „pětikorun“ a „desetikorun“ a nikoliv jednotlivé lidi se stejnou mincí.) Počet všech možných rozestavení „pětikorun“ a „desetikorun“ do fronty je počet příslušných permutací s opakováním, tj.

$$P\,(m, k\,) = (m + k)!\,/\,m!\cdot k! = \binom{m+k}{k}$$

Dále je zřejmé, že úloha má alespoň jedno řešení právě tehdy, když $m \le k$; jinak se totiž prodej nutně zastaví. V dalším tedy předpokládáme, že platí $0 \le m \le k$.
Každé rozestavení lidí ve frontě můžeme evidentně zapsat jako posloupnost m jedniček (označujících lidi s desetikorunou) a k pětek (označujících lidi s pětikorunou)