Základní vlastnosti kombinačních čísel

Pro každé $k, n \in N_0$, $k \leq n$ platí následující vzorce (a), (b):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{(a)}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \text{(b)}$$

Příklady na výpočet kombinatorického čísla s užitím uvedených vztahů (a) a (b):

viz (a): $$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot (12\text{-}3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \frac{1320}{6} = 220$$

viz (b): $$\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

Pro $n, k \in N$, $k \leq n$ platí vztah (c)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \text{(c)}$$

přičemž $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

Ilustrační příklad pro využití vztahu (c):

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{8+1}{3+1}=\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{3024}{24}=126$$

Kombinační čísla $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, …, $\binom{n}{n}$ pro n = 0, 1, 2, 3, 4, …, lze zapsat do trojúhelníkového schématu, zvaného **Pascalův trojúhelník**.

Vztah (c) umožňuje v Pascalově trojúhelníku postupně počítat hodnoty $\binom{n}{k}$. Prvky trojúhelníka tvoří koeficienty u jednotlivých členů binomického rozvoje

$$(x\pm y)^n=\binom{n}{0}x^n y^0 \pm \binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 \pm \binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\dots$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+(-1)^n x^0 y^n,$$

resp. $\quad (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \;,\; (x-y)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

Pascalův trojúhelník je geometrické uspořádání těchto binomických koeficientů.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

V praxi využitelné schéma má pak obvykle následující tvar:

$$
\begin{array}{llllllllll}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

Definice: k-členná kombinace s opakováním z n prvků $(k, n \in \mathbf{N})$ je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat).

Počet všech takových kombinací s opakováním se značí $\mathrm{K}'_k(n)$ a lze ho vyjádřit vzorcem

$$\mathrm{K}'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad
V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišené. Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je aspoň pět kuliček od každé barvy.

Řešení
V pětici kuliček, které vybíráme, nezáleží na pořadí a barvy kuliček se v ní mohou opakovat. Jde tedy o 5-ti člennou kombinaci s opakováním ze tří prvků. Je možné utvořit všechny možné pětice ze tří barev, neboť kuliček od každé barvy je dostatečné množství, tj. pět. Počet všech způsobů výběru je

$$K_5'(3) = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

Příklad
V prodejně mají na výběr z 12 různých pohlednic. Určete, kolika způsoby si z nich lze vybrat 7 pohledů.

Řešení:
Jedná se o sedmičlennou kombinaci s opakováním ze dvanácti prvků (mohu si koupit 7 různých pohledů, nebo i některé stejné!):

$$K_7'(12) = \binom{12+7-1}{7} = \binom{18}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 31\,824$$

Příklad 7
Kolik částek můžete zaplatit třemi mincemi, máte-li v peněžence korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince?

Řešení **přihrádkový systém – tři přihrádky**
první pro exemplář prvků 1,
druhou pro exemplář prvku 2
třetí pro exemplář prvku 5.

Ilustrace: [koruny / dvoukoruny / pětikoruny] , např. [/ • • / •] představuje 0 x 1Kč; 2 x 2Kč; 1 x 5Kč.

Tímto způsobem získáme následující možnosti:

3 Kč:	1, 1, 1	[• • • / /]	11 Kč:	1, 5, 5	[• / /• •]
4 Kč:	1, 1, 2	[• • / • /]	6 Kč:	2, 2, 2	[/• • • /]
7 Kč:	1, 1, 5	[• • / / •]	9 Kč:	2, 2, 5	[/ • • / •]
5 Kč:	1, 2, 2	[• / • • /]	12 Kč:	2, 5, 5	[/ • / • •]
8 Kč:	1, 2, 5	[• / • / •]	15 Kč:	5, 5, 5	[/ / • • •]

Kombinace je neuspořádaná, např. [• • • / /] je stejné jako [/ / • • •], ale permutace je uspořádaná: 3Kč a 15Kč není totéž.

každé tříčlenné kombinaci s opakováním ze tří prvků 1, 2, 5 odpovídá jediná uspořádaná pětice o třech tečkách a dvou čárkách a také obráceně.

$$\mathrm{K}'_3(3) = \mathrm{P}'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Půjde-li obecně o *k*-členné kombinace s opakováním z *n* prvků, přiřadíme stejným způsobem každé kombinaci uspořádanou skupinu s tečkami a (*n*-1) lomítky, tj. obecně permutace s opakováním ze dvou prvků, přičemž platí, že jeden se opakuje *k*-krát a druhý (*n*-1)-krát. Protože toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, platí

$$\mathrm{K}'_k(n) = \mathrm{P}'_{k,(n-1)}(n+k-1) = \frac{\left[k+(n-1)\right]!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

Uvědomíme-li si, že

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot\left[(n+k-1)-k\right]} = \binom{n+k-1}{k}$$

dostaneme vztah pro výpočet $K'_k(n)$.

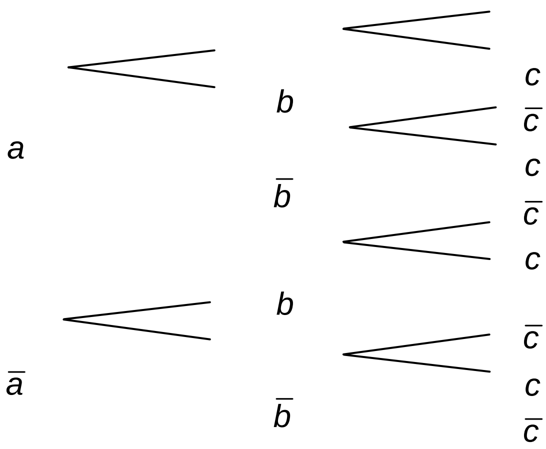
PASCALŮV TROJÚHELNÍK A KOMBINATORICKÉ PROBLÉMY

ZÁKLADNÍ PROBLÉM - Hledání všech podmnožin dané množiny

Hledejme počet všech podmnožin množiny $S = \{a, b, c\}$

Označme prvek, který není prvkem podmnožiny $\bar{a}$, resp. $\bar{b}, \bar{c}$.

Strom řešení vypadá následovně:



Podmnožina

$S_1 = \{a, b, c\}$
$S_2 = \{a, b\}$
$S_3 = \{a, c\}$
$S_4 = \{a\}$
$S_5 = \{b, c\}$
$S_6 = \{b\}$
$S_7 = \{c\}$
$S_8 = \{\ \}$

V případě **tříprvkové** množiny získáváme tedy $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3}$ větví.

Pro **čtyřprvkovou** podmnožinu podobně získáme $\mathbf{16 = 2^4}$.

Tento počet je roven součtu prvků Pascalova trojúhelníka pro $n = 4$.

Pro ***n*-prvkovou** množinu získáme $\mathbf{2^n}$ podmnožin.

PROBLÉM 1

Kolika různými způsoby při pohybu pouze dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK (viz Obr. PT1)?

```
O B R Á Z E K
B R Á Z E K
R Á Z E K
Á Z E K
Z E K
E K
K
```

Obr. PT1

Řešení:

šest přesunů

↓, →.

Hledáme tedy počet všech podmnožin základní množiny o šesti prvcích, které jsou dány uvedenými směry postupu. Dostaneme $2^6 = 64$ různých podmnožin, které odpovídají hledanému počtu, jak je možné přečíst slovo „*obrázek*“.

Součet hodnot u posledního písmene **K** = celkový počet možností:

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64, \text{ tj. } 2^6$$

→ ↓

•1	•1	•1	•1	•1	•1	•1
•1	•2	•3	•4	•5	•6	
•1	•3	•6	•10	•15		
•1	•4	•10	•20			
•1	•5	•15				
•1	•6					
•1						

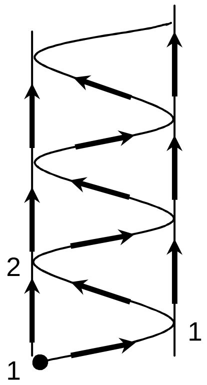
Obr. PT1a

```
      H
    H U H
  H U R U H
H U R K R U H
  H U R U H
    H U H
      H
```

```
A
K A
N K A
I N K A
M I N K A
A M I N K A
M A M I N K A
A M I N K A
M I N K A
I N K A
N K A
K A
A
```

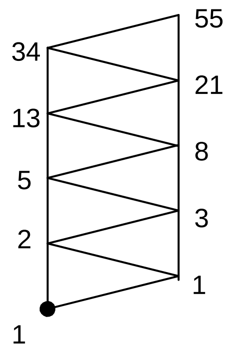
```
            C
          C E C
        C E R E C
      C E R E R E C
    C E R E V E R E C
  C E R E V T V E R E C
C E R E V T C T V E R E C
            T V E R E C
            V E R E C
            E R E C
            R E C
            E C
```

PROBLÉM 2 - Hledání počtu cest od startu k cíli uvedené trasy



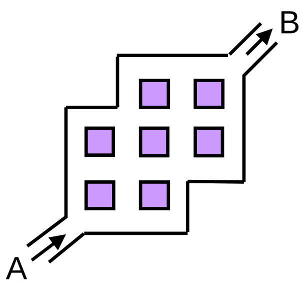
Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny – cesta se samými zatáčkami, doprava, doleva, potom zase doprava a zase doleva a tak dále (viz Obr. PT2). Z míst, v nichž se serpentiny ohýbají, můžeme na výstupu pokračovat i přímou cestou. Komu prudké stoupání nevadí, může si cestu občas zkrátit.

Obr. PT2 Schéma plánku



Obr. PT2b Překreslení plánku s řešením

PROBLÉM 3 (převzat z [6])



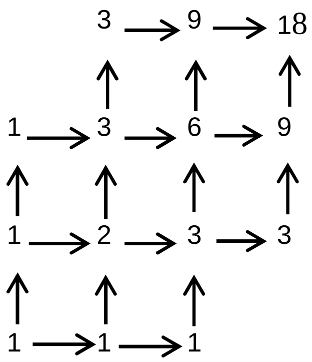
Obr. PT3 Bludiště

V místě A vběhla do bludiště vyděšená myší rodina (viz Obr. PT3).

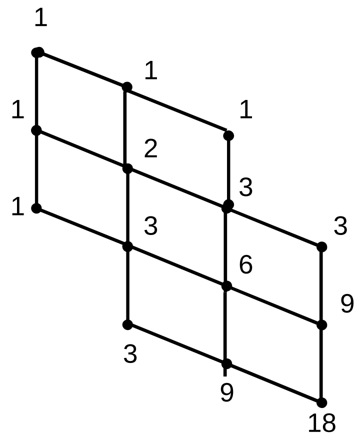
Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

1. *Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.*
2. *Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.*
3. *Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.*

Kolik členů měla myší rodina?



Obr. PT3a Síť bludiště a klíč



Obr. PT3b *h*-diagram

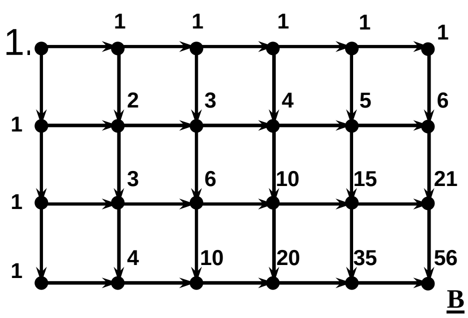
PROBLÉM 4

Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít?

Řešení:

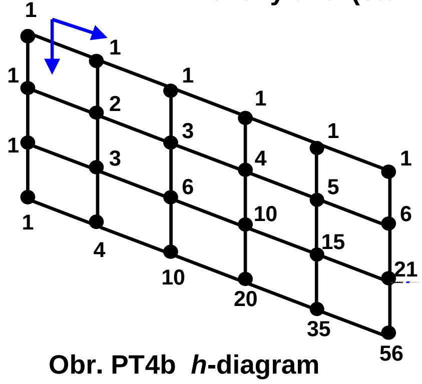
Následující schéma zachycuje jeden z možných průběhů zápasu.

0 : 0	**1 : 0**	**2 : 0**	**3 : 0**	**4 : 0**	**5 : 0**
0 : 1	**1 : 1**	**2 : 1**	**3 : 1**	**4 : 1**	**5 : 1**
0 : 2	**1 : 2**	**2 : 2**	**3 : 2**	**4 : 2**	**5 : 2**
0 : 3	**1 : 3**	**2 : 3**	**3 : 3**	**4 : 3**	**5 : 3**



Obr. PT4a Graf situace

A … výchozí uzel (stav 0 : 0)
B … cílový uzel (stav 5 : 3)



Obr. PT4b *h*-diagram

➤ ***Poznámka:***

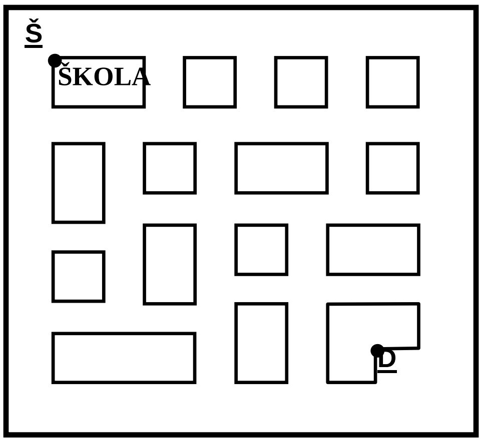
Způsob nalezení počtu všech možných cest ve čtvercových sítích popisuje Kopka [7]. Daný počet je možno matematicky určit použitím kombinatorického vztahu pro (m+n) prvků (permutace s opakováním).

Jednotlivá čísla m, n udávají počet nutných posunů v daném směru, abychom se dostali z daného místa **A** do určeného místa **B**. Vyjádříme-li tyto přesuny pomocí šipek ↓, →, je v našem případě m = 5, n = 3. Pro počet hledaných cest tak dostáváme

$$\mathrm{P}'(m,n)=\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!},\ \text{tj. } \mathrm{P}'_{2,3}(5)=\frac{(5+3)!}{5!\cdot 3!}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56$$

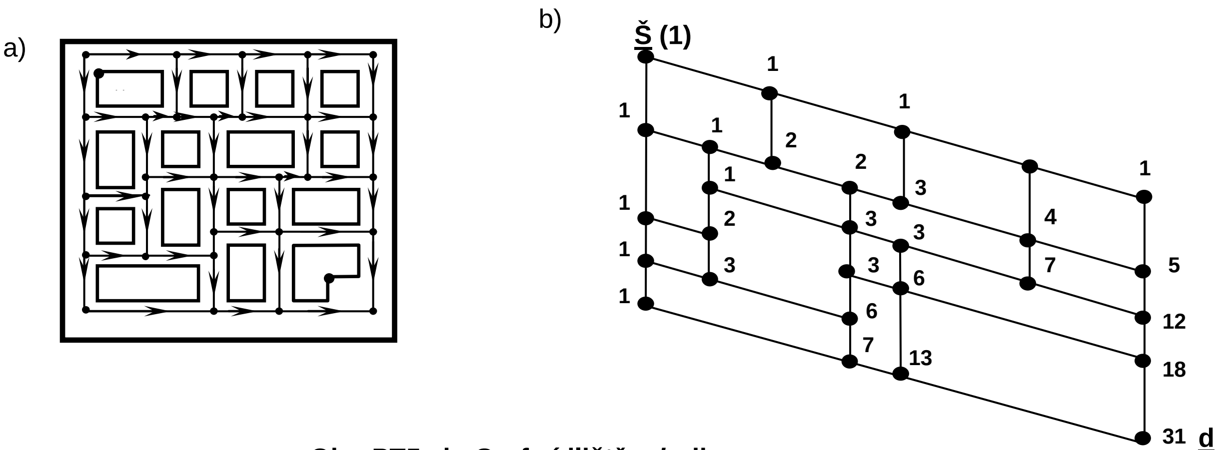
PROBLÉM 5

Plánek na Obr. PT5 zachycuje schematicky rozmístění budov a křižovatek. Při chůzi zleva doprava a shora dolů hledáme počet různých cest z místa <u>š</u>(kola) do místa <u>d</u>(ům).



Obr. PT5 Plánek sídliště

Řešení:

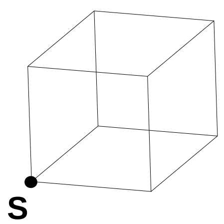


Obr. PT5a,b Graf sídliště a *h*-diagram

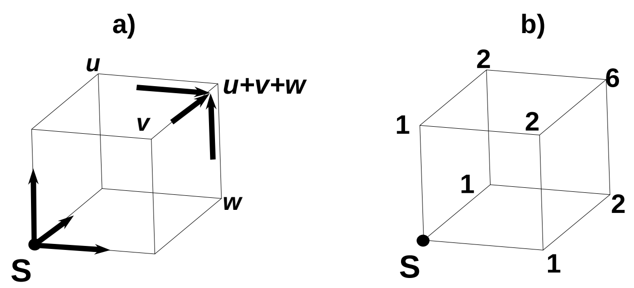
PROBLÉM 6 - Cestování po krychli

Zkoumejte počet nejkratších cest z bodu S do zbývajících vrcholů krychle (Obr. PT6).

Řešení: Postupujeme podobně jako u Problému 2. Do daného vrcholu se dostaneme prostřednictvím předcházejících, nevracíme se zpět, postupujeme jen ve směru šipek. Sčítáme počet cest, které vedou do vrcholů, z nichž vedou šipky (Obr. PT6 a,b).



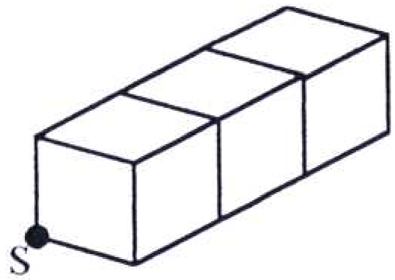
Obr. PT6



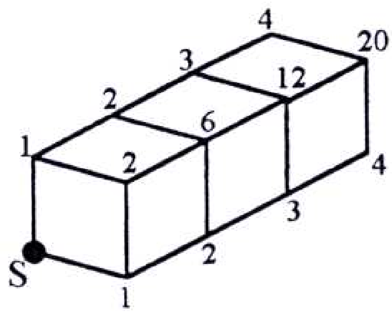
Obr. PT6 a,b

PROBLÉM 7 - CESTOVÁNÍ PO SOUSTAVĚ KRYCHLÍ

Kolik nejkratších cest z bodu S vede do všech viditelných vrcholů tří krychlí? (viz Obr. PT7).

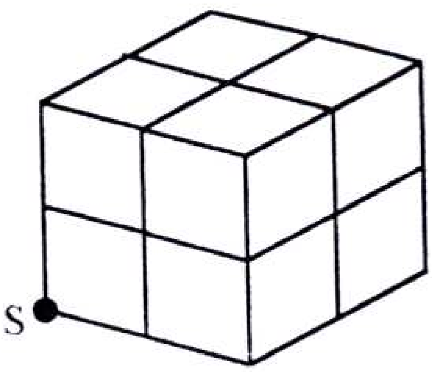


Obr. PT7

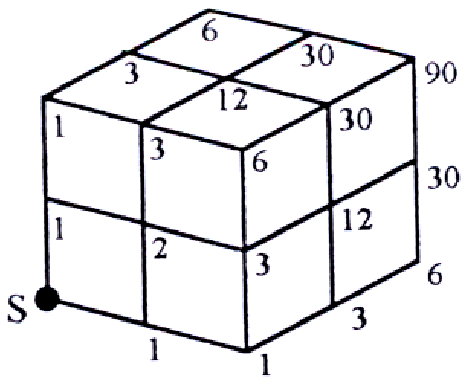


Obr. PT7a

Zjistěte počet nejkratších cest z bodu S do všech viditelných bodů (vrcholů) dvou vrstev krychlí (viz Obr. PT8).



Obr. PT8



Obr. PT8a

➤ ***Poznámka:***

Podobně jako u problémů 1 - 4 je možno počet cest vedoucích mezi dvěma místy po krychlové síti určit pomocí vztahu

$$\mathrm{P}'(p,d,h)=\frac{(p+d+h)!}{p!\cdot d!\cdot h!},$$

kde $p\{d,h\}$ značí počet kroků vpravo {dozadu, nahoru}. ➤

UŽITÍ TEORIE GRAFŮ PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH Z KOMBINATORIKY

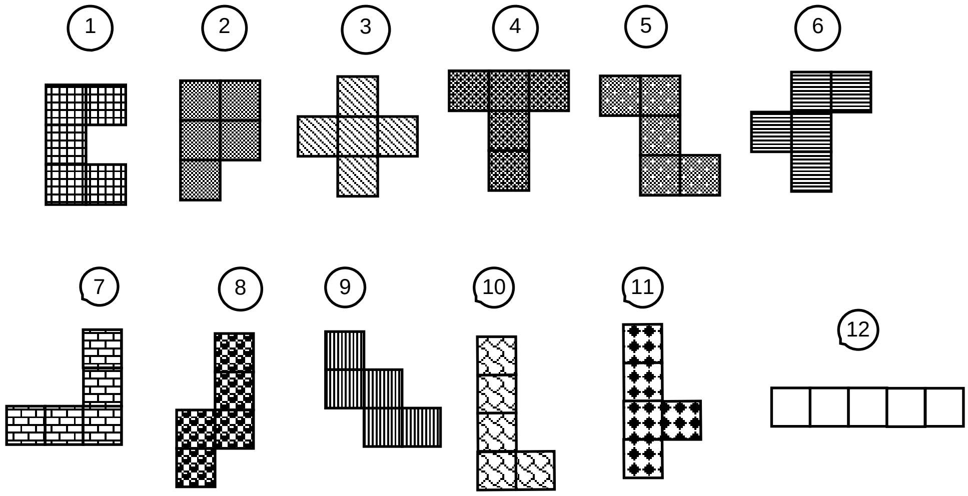
- skutečná bludiště *(Čechy: Kroměříž – park Květná zahrada, Praha na Petříně – zrcadlové bludiště; Británie: Hampton Court – stěny bludiště jsou ze stříhaných křovin);*

- obrázková bludiště*, bývají oproti skutečným rozsáhlejší, lze v nich realizovat prvky nedosažitelné ve skutečných bludištích. Jde v podstatě o kreslená bludiště;*

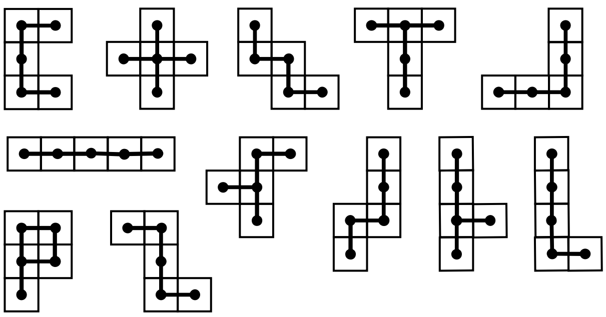
- barevná bludiště*, s „turistickými" cestami, pravidla vymezují roli barev. Použití barevných bran v daném bludišti uvádí Hejný [5];*

- počítačová bludiště *souvisejí s programy, které přímo vytvářejí bludiště - nejde o počítačové pronásledování v místnostech a chodbách velké budovy.*

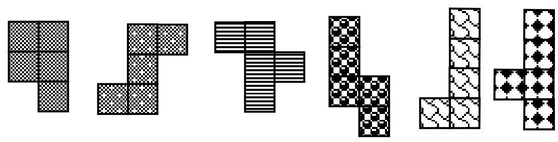
PENTAMINO



Každému dílu pentamina odpovídá jistý graf, který pro naše účely nazveme ***pentagraf“***. Pro lepší názornost je příslušný „pentagraf“ umístěn přímo do dané sestavy čtverečků (viz Obr. 1).



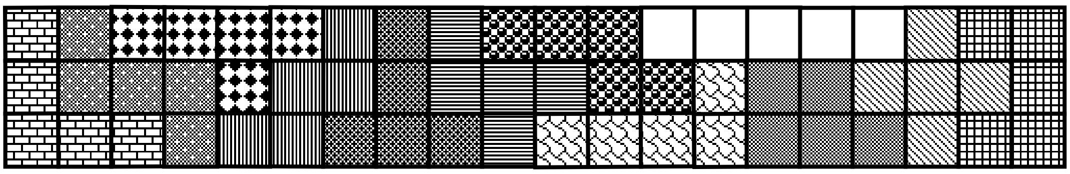
Díly č. 2, 5, 6, 8,10, a 11 je možno použít zrdcadlově



Obr. 1 „Pentagrafy“

Úloha GK1

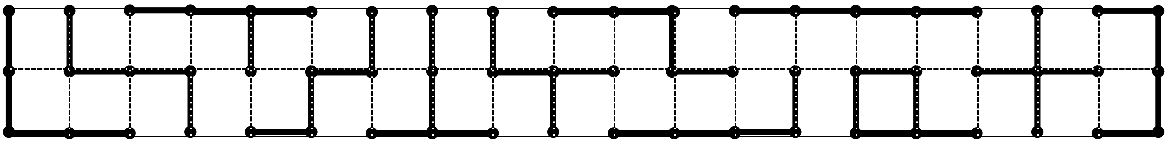
Je dána čtvercová síť – obdélník 3×20. Skládáním dvanácti různých dílů pentamina vyplňte daný obdélník.



Obr. GK1a) Obdélník

Úlohu přeformulujeme následovně:

Do čtvercové sítě 2×20 umístěte všech 12 pentagrafů tak, aby žádné dva neměly ani jeden společný uzel a všechny uzly dané čtvercové sítě náležely jinému pentagrafu (Obr. GK1b).

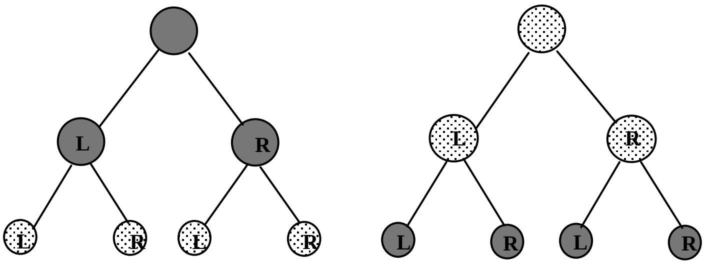


Obr. GK1b) Pokrytí čtvercové sítě

Úloha GK3

Házíme dvěma stejnými mincemi. Je větší pravděpodobnost, že po dopadu bude na obou mincích totéž (Rub – znak nebo Líc - číslo) nebo že na každé minci bude něco jiného?

Řešení:



Obr. GK3: Hod dvěma mincemi

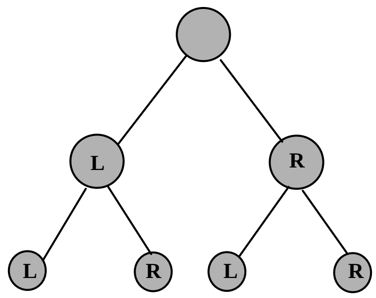
Pravděpodobnost je stejná; počet smíšených dvojic typu RL a dvojic „stejnorodých“ LL a RR je shodný.

Úloha GK4

Házíme nyní jednou mincí dvakrát. Rozhodni, která z možností je více pravděpodobná:

1. padne dvakrát totéž, tj. 2x znak nebo 2x číslo
2. při každém hodu padne něco jiného

<u>**Řešení:**</u>



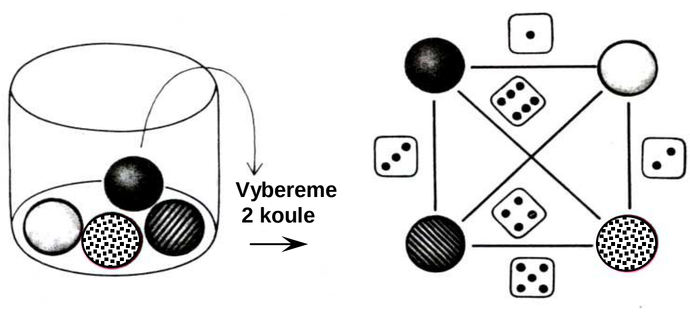
Obr. GK4: Hod jednou mincí

Z Obr.GK4 je evidentní, že obě možnosti jsou stejně pravděpodobné. Počet vzájemných „stejnorodých“ kombinací LL, RR je 2, „nestejnorodých“ RL také 2.

Úloha GK5

Klasická hrací kostka má pravidelný tvar krychle, na každé stěně je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Představme si, že kostku ztratíme a potřebujeme simulovat hod kostkou pomocí 4 koulí různé barvy. Koule umístíme do urny a táhneme 2 z nich. Tažené koule nevracíme zpět.

Řešení:



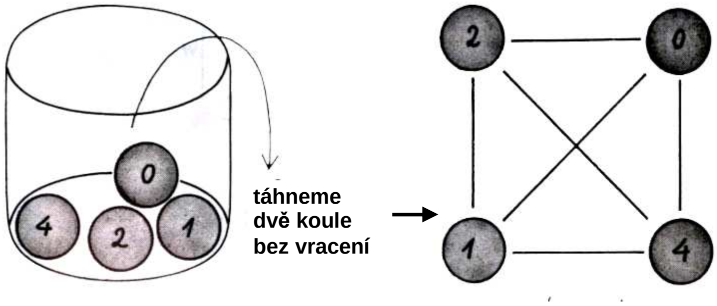
Obr. GK5: Simulace hodu

Úloha GK6

K dispozici máme 4 stejné koule. Jak je možné nyní simulovat hod kostkou?

Řešení:

Očíslujeme koule tak, aby při vzájemné kombinaci čísel bylo možno získat číslice 1 až 6. Táhneme 2 koule bez vracení.



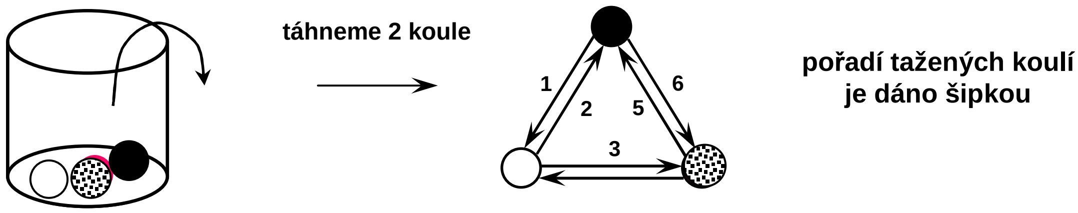
Obr. GK6: Simulace hodu

Úloha GK7

K dispozici máme 3 koule různé barvy. Jak nyní můžeme simulovat hod kostkou?

Řešení:

Nyní záleží na pořadí, v jakém bude koule tažena, což demonstrujeme orientovaným grafem



Obr. GK7: Simulace hodu

Úloha GK8

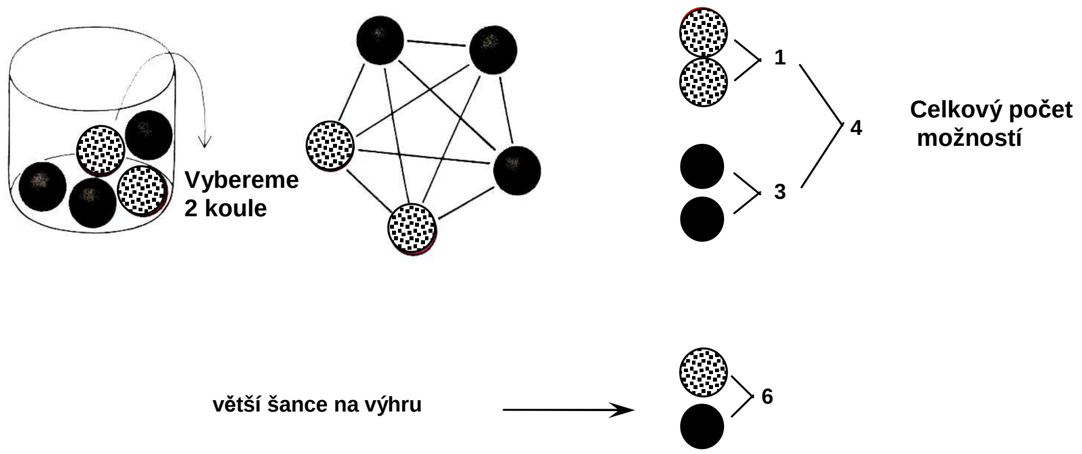
V urně jsou 3 černé a 2 červené koule. Vytáhneme 2 koule (tažené koule nevracíme do urny):

Petr (P) vyhrává, jsou-li obě tažené koule stejné barvy.

Milan (M) vyhrává, jsou-li obě tažené koule různé barvy.

Který z hochů má větší šanci vyhrát?

Řešení:



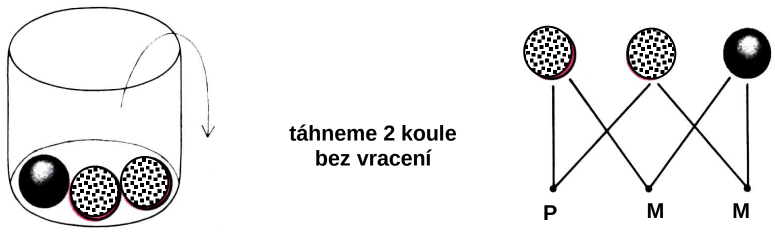
Obr. GK8: Tah koulí

***Odpověď**: Větší šanci na výhru má Milan*

Úloha GK9

V urně jsou 2 červené a 1 černá koule. Podmínky výhry pro Petra a Milana jsou stejné jako u předchozího problému. Který z hochů má větší šanci vyhrát?

Řešení:



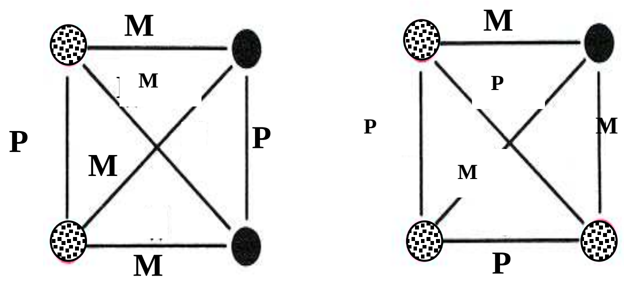
Obr. GK9: Šance na

Odpověď: **M** má větší šanci na výhru.

Úloha GK10

Jakou kouli musíme přidat do urny, aby hra byla spravedlivá?

Řešení: Musíme přidat červenou kouli – viz Obr. GK10 a), b)



Obr. GK10 a)

M … 4 možnost
P … 2 možnosti
Nespravedlivá hra
(větší šanci má Milan)

Obr. GK10 b)

M… 3 možnosti
P … 3 možnosti
Spravedlivá hra
(šance na výhru jsou stejné)

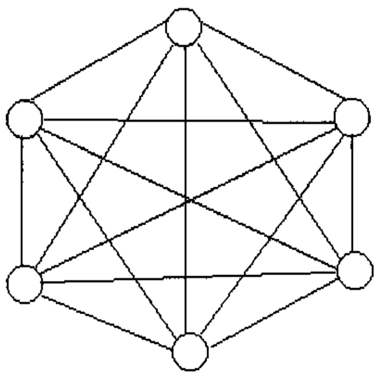
Obr. GK10 a,b Simulace hodu kostkou

Grafů lze s výhodou využít i při řešení úloh se sportovní tématikou.

Úloha GK11

Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Řešení:



Obr. GK11: Graf

Jde o vytvoření úplného neorientovaného grafu na šesti uzlech, jak ukazuje obrázek – počet hran je 15 (uzel grafu představuje družstvo, spojnice zápas). Při výpočtu je možné využít kombinačních čísel:

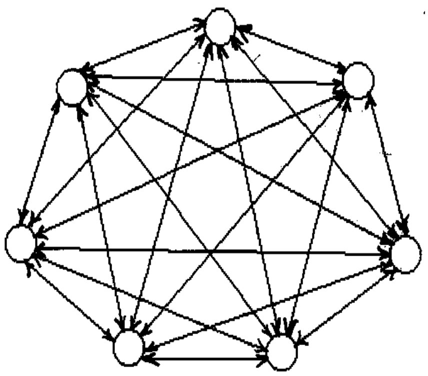
$$K_2(6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$$

Odehraje se 15 zápasů.

Úloha GK12

Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?

Řešení:



Obr. GK12: Graf zápasů

Jedná se o vytvoření úplného orientovaného grafu. Vzhledem k podmínkám úlohy jsou šipky obousměrné (první družstvo hraje s druhým a naopak). Celkový počet zápasů je proto dvojnásobný:

$$2 \cdot K_2(7) = 2 \cdot \binom{7}{2} = 2 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 42$$