SEPAROVANÉ MODELY PASCALOVA TROJÚHELNÍKA

JANA PŘÍHONSKÁ, TU v Liberci

Blaise Pascal se narodil 19. července 1623 v Clermontu v rodině matematika Etienna Pascala, od něhož získával první matematické vzdělání. Již od dětství vynikal matematickým nadáním. Značnou zálibu projevoval v geometrii, studoval práce řeckého matematika Apollóna z Pergy.

Ve dvanácti letech sestavil vlastní geometrickou soustavu založenou na Euklidovi a v 16 letech napsal studii o kuželosečkách, kde je mimo jiné obsažena i věta o šestiúhelníku vepsaném do kuželosečky. Studoval matematiku, fyziku a filozofii. V roce 1653 zaslal Chevalier de Méré Pascalovi dva problémy hazardních her. Pascal v roce 1654 v dopisech konzultoval tuto problematiku s francouzským matematikem P. Fermatem a nizozemským matematikem a fyzikem Ch. Huygensem a přispěl k rozvoji myšlenek teorie pravděpodobnosti. Současně studoval i otázky kombinatoriky. V „Pojednání o aritmetickém trojúhelníku“ vyslovil několik základních pouček teorie pravděpodobnosti a kombinatoriky - zabýval se výpočty binomických koeficientů. Prvky binomického rozdělení pravděpodobnosti dávají známý symetrický Pascalův trojúhelník. Trojúhelníkové uspořádání binomických koeficientů bylo známo již dříve (trojúhelník byl již uveden v čínském matematickém traktátu z roku 1303), ale až jako „Pascalův trojúhelník“ se rozšířilo mezi evropské matematiky.

S Pascalovým trojúhelníkem a jeho vlastnostmi jsou studenti seznamováni v rámci učiva kombinatoriky. Učitel by však měl dát studentům příležitost k tomu, aby jeho vlastnosti a následně jeho využití při řešení problémů objevili sami. Nové metody řešení problémů pomáhá objevovat heuristické uvažování. Jedním ze základních cílů vyučování matematiky by pak mělo být vést žáka k osvojení tohoto způsobu uvažování.

Mezi úlohy, které lze řešit heuristickým uvažováním patří ty úlohy, kde je nutno objevit skryté vazby mezi podmínkami úlohy, mezi danými, známými a neznámými prvky úlohy [1]. Bylo popsáno mnoho základních postupů, užitečných ve většině případů. V [5] nalezneme dělení řešitelských postupů na:

- Hledání zákonitostí
- Kreslení obrázků
- Formulace ekvivalentních problémů

- Modifikace problému
- Postup „odzadu“
- Zevšeobecnění

Podobně podle Kopky [4] patří k nejběžněji používaným heuristickým strategiím

- Přeformulování úlohy
- Analogie
- Zevšeobecňování
- Specializace
- Cesta zpět
- Systematické experimentování
- Konkretizace
- Zavedení pomocných prvků

V následujících předložených problémech se budeme zabývat otázkou nalezení všech dostupných cest v bludištích, resp. ve čtvercových, krychlových či jiných typech sítí. Problémy můžeme zařadit mezi heuristické.

Strategie řešení jednotlivých problémů se může lišit, avšak v řešení všech problémů se dá s výhodou využít Pascalova trojúhelníka. Při řešení problémů využíváme velmi často hasseovské diagramy [8], které umožňují lepší vhled do zadané situace. S objevováním vlastností Pascalova trojúhelníka je možno začít již na základní škole. Jednou z možností, jak vyřešit zadané problémy, je využití teorie grafů, resp. některých jejích metod [7], přestože tato teorie není součástí standardních osnov základní školy.

Transformace zadané situace do prostředí grafů však dobře umožňuje zákonitosti Pascalova trojúhelníka objevit. Jde nám především o vlastní objev skrytého modelu Pascalova trojúhelníka. Než uvedeme základní problém, připomeňme, co rozumíme Pascalovým trojúhelníkem.

Pro každé celé číslo k a reálné číslo x platí

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$$

Z této definice binomických koeficientů plyne platnost následující rekurentní formule pro $n, k \in N$, $n \geq k$ platí $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Tato formule umožňuje postupně počítat hodnoty $\binom{n}{k}$. Tabulce těchto hodnot se obvykle říká Pascalův trojúhelník. V praxi využitelné schéma má pak obvykle tvar

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

resp.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

Prvky Pascalova trojúhelníka tvoří koeficienty u jednotlivých členů binomického rozvoje

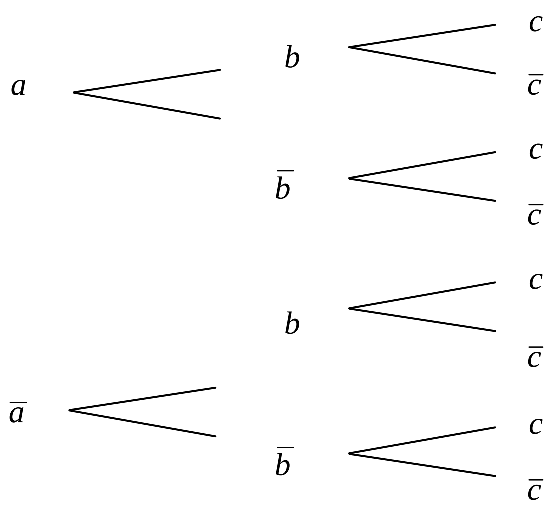
$$(x \pm y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 \pm \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + (-1)^n x^0 y^n$$

resp. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

ZÁKLADNÍ PROBLÉM - Hledání všech podmnožin dané množiny

Hledejme počet všech podmnožin množiny $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$

Řešení: Systematickým zápisem všech možných podmnožin získáme strom řešení. Přitom každý prvek buď je nebo není prvkem dané podmnožiny. Označme prvek, který není prvkem podmnožiny $\bar{a}$, resp. $\bar{b}, \bar{c}$. Strom řešení vypadá následovně:



Podmnožina

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, b\}$

$S_3 = \{a, c\}$

$S_4 = \{a\}$

$S_5 = \{b, c\}$

$S_6 = \{b\}$

$S_7 = \{c\}$

$S_8 = \{\ \}$

Každá větev představuje konkrétní podmnožinu S_i, která je zapsána výčtem svých prvků vedle uvedeného stromu řešení. Je evidentní, že každým dalším prvkem, který zahrneme do stromu řešení, se počet větví zdvojnásobí.

V případě tříprvkové množiny získáváme tedy 2×2×2 = 8 = 2^3 větví. Pro čtyřprvkovou podmnožinu podobně získáme 16 podmnožin, což odpovídá 2^4. Tento počet je roven součtu prvků Pascalova trojúhelníka pro n = 4. Pro *n*-prvkovou množinu získáme 2^n podmnožin. Seřadíme-li nyní příslušné podmnožiny podle počtu prvků, získáme počet podmnožin o stejných počtech prvků jako členy Pascalova trojúhelníka.

Tyto úvahy mohou vést k důkazu celkového počtu všech podmnožin S_i s k prvky množiny *S*, která má *n* prvků. Počet těchto podmnožin odpovídá vztahu $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Uvedená rovnost vyplývá z binomické věty $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, kde $x = 1$ a $y = 1$.

O zmíněné metodě a dalších metodách, které se vztahují k uvedené problematice, je možné se více dočíst v [5].

PROBLÉM 1

Kolika různými způsoby při pohybu pouze dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK (viz obr. 1)?

O	B	R	Á	Z	E	K
B	R	Á	Z	E	K	
R	Á	Z	E	K		
Á	Z	E	K			
Z	E	K				
E	K					
K						

Obr. 1

Řešení: Při čtení slova „*obrázek*“ můžeme postupovat pouze ve dvou směrech: dolů a doprava. Symbolicky můžeme tuto skutečnost znázornit pomocí šipek ↓, →. Abychom se od počátečního písmene dostali k poslednímu, je nutno provést šest přesunů z výchozí pozice. Hledáme tedy počet všech podmnožin základní množiny o šesti prvcích, které jsou dány uvedenými směry postupu.

Dostaneme $2^6 = 64$ různých podmnožin, které odpovídají hledanému počtu, jak je možné přečíst slovo „*obrázek*“.

Zakreslíme nyní zjednodušený plán situace. Využijeme uzlového grafu, ve kterém vrcholy představují jednotlivá písmena (uzly grafu), jejich spojnice (hrany grafu) představují jednotlivé možnosti postupu čtení daného slova, viz obr. 1a. Ve vrcholech získané sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán součtem cest, které vedou do předchozích písmen.

Sečteme-li všechny získané hodnoty u posledního písmene K, dostaneme celkový počet možností: 1 + 6 +15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64, tj. 2^6 možností.

•1	•1	•1	•1	•1	•1	•1
•1	•2	•3	•4	•5	•6	
•1	•3	•6	•10	•15		
•1	•4	•10	•20			
•1	•5	•15				
•1	•6					
•1						

Obr. 1a

Uvedený problém je možno dále modifikovat a měnit slova či schémata, se kterými pracujeme. Uveďme některé z dalších možností, jejichž řešení ponecháme čtenáři:

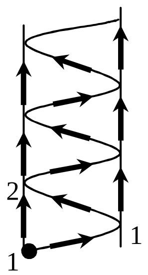
Kolika různými způsoby při pohybu od písmene k písmeni je možné přečíst slovo KRUH, ČTVEREC, MAMINKA?

```
      H
    H U H
  H U R U H
H U R K R U H
  H U R U H
    H U H
      H
```

```
A
K A
N K A
I N K A
M I N K A
A M I N K A
M A M I N K A
A M I N K A
M I N K A
I N K A
N K A
K A
A
```

```
            C
          C E C
        C E R E C
      C E R E R E C
    C E R E V E R E C
  C E R E V T V E R E C
C E R E V T C T V E R E C
            T V E R E C
            V E R E C
            E R E C
            R E C
            E C
            C
```

PROBLÉM 2 - Hledání počtu cest od startu k cíli uvedené trasy



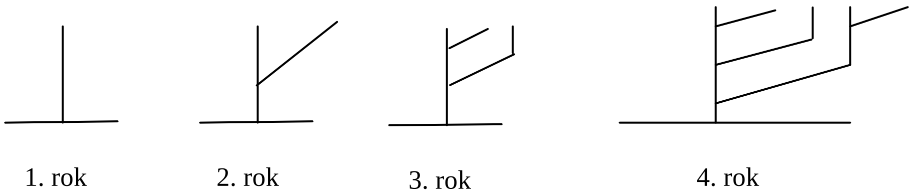
Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny – cesta se samými zatáčkami, doprava, doleva, potom zase doprava a zase doleva a tak dále (viz obr. 2). Z míst, v nichž se serpentiny ohýbají, můžeme na výstupu pokračovat i přímou cestou. Komu prudké stoupání nevadí, může si cestu občas zkrátit.

Obr. 2 Schéma plánku

Úkol: Ke každému bodu, ve kterém se cesty větví, napiš, kolika způsoby se tam turisté mohou dostat. Samozřejmě se přitom nebudou nikdy vracet, půjdou stále vzhůru, ve směru udaném některou ze šipek. Na první dvě rozhraní jsou již správná řešení napsána. Ke startu je připsána 1, protože nikde před startem nebylo rozcestí a dalo se tam dostat pouze jedinou cestou.

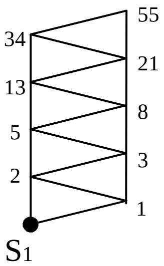
Poznámka k řešení:

Problém ukazuje při svém vyřešení na souvislost mezi čísly jako u Fibonacciho posloupnosti. Čísla na jednotlivých rozcestích, procházíme-li po daných cestách předloženého plánku, tvoří stejnou posloupnost, jako počty větví Fibonacciho stromu. Vždy následuje po dvou sousedních číslech jejich součet. "Podivný strom Fibonacciho" roste podle daného pravidla: vždy v příštím roce každá boční větev začne růst směrem vzhůru; z větví, které v předcházejícím (minulém) roce rostly směrem vzhůru, vyroste vždy v příštím roce nová boční větev. Princip narůstání ukazuje obr. 2a*:*



Obr. 2a Počet větví Fibonacciho stromu

Počet větví v jednotlivých letech tvoří posloupnost: 1, 2, 3, 5, … Pro naše potřeby budeme tuto posloupnost nazývat Fibonacciho posloupností – jde o Fibonacciho posloupnost, v níž vynecháváme první člen 1 a to z čistě praktického důvodu, neboť v konkrétních případech na hledání počtu cest vedoucích z daného místa do jiného přiřazujeme počátečnímu místu 1 (neexistuje více možností, jak se do vstupního místa dostat). Do konkrétního místa se pak můžeme dostat pouze přes nejbližší body, z nichž do tohoto místa vedou šipky (tj. dodržujeme povolený směr postupu).



Řešení:

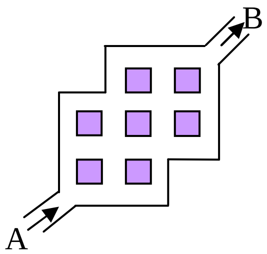
Pro zjišťování čísla, které se připíše k dalšímu rozcestí, si můžeme pomoci jednoduchým překreslením plánku. Po připsání číselných hodnot, vyjadřujících počet možných cest, kterými se do daného místa dostaneme, získáme graf na obr. 2b.

Obr.2b Překreslení plánku s řešením

Odpověď: Až na vrchol stoupání existuje cekem 55 různých cest.

Poznámka*:* O využití grafů při řešení úloh je pojednáno např. v [6], [7]. Problémy 1 – 5 lze bez větších obtíží řešit již na základní škole. Hovoříme-li v dalším textu o žákovi, máme na mysli žáka ZŠ i studenta nižších ročníků gymnázií.

PROBLÉM 3 (převzat z [3])



Obr. 3 Bludiště

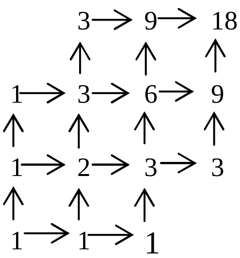
V místě A vběhla do bludiště vyděšená myší rodina(viz obr. 3). Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší jsme se dozvěděli:

1. *Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru.*
2. *Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.*
3. *Kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé musely běžet po stejné cestě.*

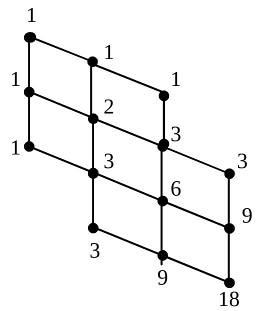
Kolik členů měla myší rodina?

Řešení:

Zakreslíme zjednodušený plán bludiště. Vrcholy ve čtvercové síti představují křižovatky (uzly grafu), jejich strany chodby (hrany grafu) – viz obr. 3a. Ve vrcholech čtvercové sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán uvedeným klíčem. Výraznější zpřehlednění celé situace vnáší do řešení užití tzv. *h*-diagramu, kde není nutno používat šipky (obr. 3b).



Obr. 3a Síť bludiště a klíč



Obr. 3b *h*-diagram

Odpověď’: Myší rodina měla 18 členů.

Poznámka:

Hasseovské diagramy (h-diagramy) dovolují podstatně redukovat zadání významných relací, jejich grafových reprezentací a diagramových znázornění. Při jejich zavedení vycházíme z orientovaných grafů posetů (poset - částečně uspořádaná množina - binární relace na dané množině M). Posety mají tři významné vlastnosti. Jsou reflexivní, antisymetrické a tranzitivní. Přechod od orientovaného grafu posetu k jeho *h*-diagramu znamená zjednodušení [8]:

- odstraníme všechny smyčky v uzlech,

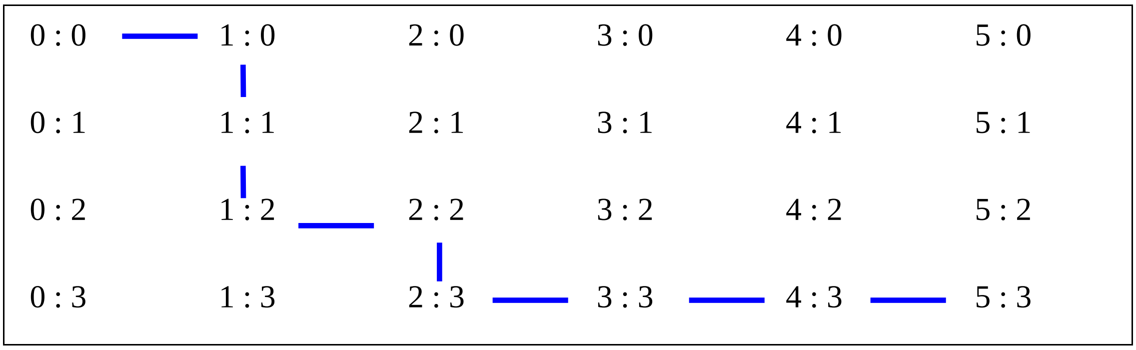
- odstraníme všechny „tranzitivní“ hrany,
- uspořádáme uzly do úrovní (zdola nahoru, zprava doleva) podle počtu jejich předchůdců,
- odstraníme všechny šipky.

Jednu z možností, jak se dopracovat k Pascalovu trojúhelníku, představují sportovní úlohy. Následující problém je převzatý z [2]. Řešení je možné převést na hledání všech možných cest v orientovaném grafu.

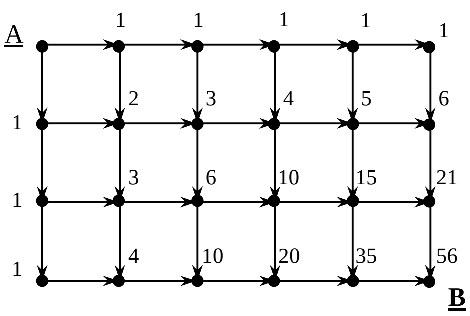
PROBLÉM 4

Hokejový zápas skončil výsledkem 5:3. Kolik různých průběhů mohl mít?

Řešení: Následující schéma zachycuje jeden z možných průběhů zápasu.

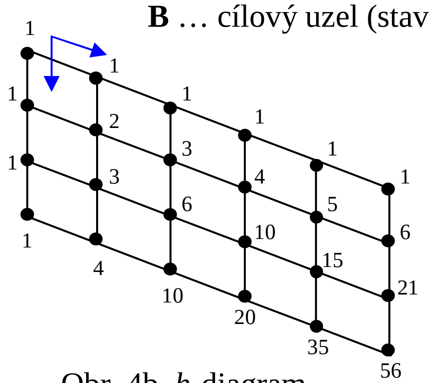


Na obr. 4a,b je uveden graf situace a příslušný *h*-diagram. Uzly odpovídají jednotlivým stavům, šipka znázorňuje přechod z jednoho stavu do druhého. Hledáme počet cest vedoucích do jednotlivých bodů kosočtvercové, resp. kosodélníkové sítě. Směr postupu je dán vyznačenými šipkami. Číslo u uzlu představuje počet dostupných cest.



Obr. 4a Graf situace

A … výchozí uzel (stav 0 : 0)
B … cílový uzel (stav 5 : 3)



Obr. 4b *h*-diagram

Odpověď: Počet všech možných průběhů zápasu je 56.

Poznámka:

Způsob nalezení počtu všech možných cest ve čtvercových sítích popisuje Kopka [4]. Daný počet je možno matematicky určit použitím kombinatorického vztahu pro (m+n) prvků a přesunout se tak o úroveň výš – na střední školu. Jednotlivá čísla m, n udávají počet nutných posunů v daném směru, abychom se dostali z daného místa A do určeného místa B. Vyjádříme-li tyto přesuny pomocí šipek ↓, →, je v našem případě m = 5, n = 3. Dostáváme tak počet hledaných cest

$$C = (m,n) = \frac{(m+n)!}{m\,!\cdot n!} = \frac{(5+3)!}{5!\cdot 3!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$$

Uvedený vztah může studentům na střední škole posloužit k ověření správnosti nalezeného počtu hledaných cest. Úlohy zaměřené na prohledávání čtvercových, resp. kosodélníkových a jiných sítí nevyžadují speciální matematické dovednosti, jsou zajímavé, motivující a je možno využít je pro nácvik procházení bludišti. Poskytují mnoho možností na vytváření tzv. divergentních úloh [1]. Divergentní úlohy jsou velmi důležité, protože vyžadují aktivní poznávací činnost, hledání, zkoumání, objevování, vytváření nových strategií a metod řešení a tím vlastně vedou žáka, resp. studenta k uplatnění tvořivých myšlenkových schopností použití heuristických strategií. Myšlenkové procesy při řešení těchto úloh jsou procesy, při nichž je řešení zaměřené do šířky – produkuje různé nápady, alternativy, hypotézy.

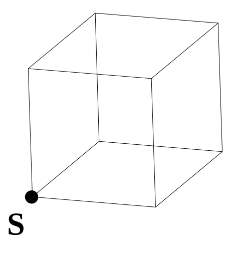
U následujícího problému se přesuneme z dvojrozměrného do trojrozměrného prostoru. Budeme hledat počet cest v krychlových sítích (obr. 5).

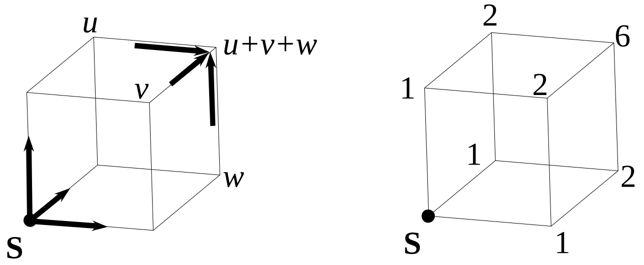
PROBLÉM 5 - Cestování po krychli

Zkoumejte počet nejkratších cest z bodu S do zbývajících vrcholů krychle .

***Řešení*:**

Řešení je uvedeno na obr. 5a,b. Postupujeme podobně jako u problému 2. Do daného vrcholu se dostaneme prostřednictvím předcházejících, nevracíme se zpět, postupujeme jen ve směru šipek. Sčítáme počet cest, které vedou do vrcholů, z nichž vedou šipky (viz obr. 5a,b).





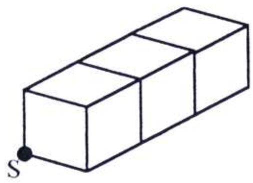
Obr. 5

Obr. 5a,b

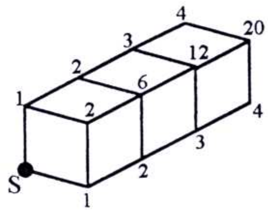
PROBLÉM 6 - Cestování po soustavě krychlí

Kolik nejkratších cest z bodu S vede do všech viditelných vrcholů tří krychlí?

***Řešení*:** je uvedeno na obr. 6a.



Obr. 6

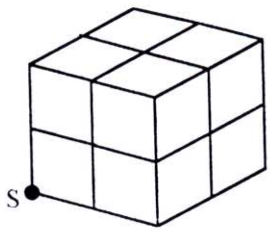


Obr. 6a

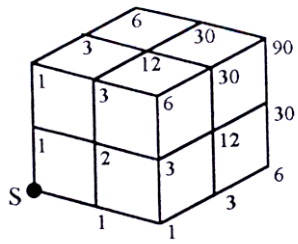
PROBLÉM 7 – Cestování po soustavě krychlí

Zjistěte počet nejkratších cest z bodu S do všech viditelných bodů (vrcholů) dvou vrstev krychlí.

***Řešení*:** je uvedeno na obr. 7a.



Obr. 7



Obr. 7a

Poznámka:

Podobně jako u problémů 1 - 4 je možno počet cest vedoucích mezi dvěma místy po krychlové síti určit pomocí vztahu

$$C(p,d,h) = \frac{(p+d+h)!}{p! \cdot d! \cdot h!},$$

kde *p{d, h}* značí počet kroků vpravo {dozadu, nahoru}.

Problémy 6, 7 řadíme mezi obtížnější z hlediska prostorové představivosti o uspořádání krychlí a přípustného pohybu. Doporučuji k jejich řešení přistoupit na střední škole.

Závěr

Netypické problémové úlohy se nevyznačují až tak svojí matematickou obtížností, jako spíše novostí a nezvyklostí problémové situace. Problémovou úlohou může být pro žáka či studenta i úloha s triviálním řešením, pokud nepatří mezi řešiteli známé úlohy. Úloha je pro řešitele neznámá jen do okamžiku jejího vyřešení, kdy se stává rutinní úlohou. Ale právě okamžik, kdy je problém vyřešen, je velice důležitý pro objevování nových metod řešení, aplikaci matematických zákonitostí a je vlastním prostředkem matematického vzdělávání žáka/studenta. Řešení výše uvedených problémů je jednou z možností, jak rozvíjet heuristické uvažování a uvědomovat si aplikaci získaných poznatků při řešení atypických problémů.

LITERATURA:

[1] Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (Tvorivost' v matematike).* Essox, Prešov 2000.

[2] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky* 2. SPN, Bratislava 1990.

[3] Koman, M.: *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy*. Edice Praxe učitele matematiky-fyziky-informatiky. Prometheus, 1995.

[4] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Acta universitatis Purkynianae 40, Ústí nad Labem 1999.

[5] Larson, L. C.: *Metódy riešenia matematických problémov*. Vydavatel'stvo ALFA, Bratislava 1983.

[6] *Precalculus and Discrete Mathematics*. The University of Chicago School Mathematics Project. Scott, Foresman and Company, Glanview, Illinois, 1992.

[7] Příhonská, J.: Teorie grafů v učivu základní školy. In: Sborník Mezinárodní věd. konf. *Matematika v príprave učiteľov 1.st. ZŠ,* Liptovský Trnovec, 2001, s. 40-47.

[8] Příhonská, J.- Vild, J.: Hasseovské diagramy ve výuce. In: Sborník *Mezin. konference* kateder matematiky připravujících učitele matematiky. Liberec, září 2000, s. 91-96.

Kontaktní adresa:
RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
TUL v Liberci, Hálkova 6, 461 17 Liberec
tel.: +420-485 352 370
e-mail: jana.prihonska@tul.cz