Kapitola 4. ŘEŠENÉ ÚLOHY

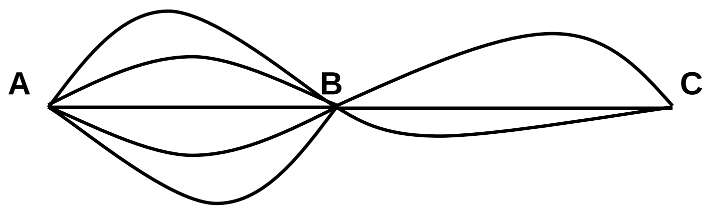
V této kapitole je předložen soubor řešených úloh. Úlohy jsou rozděleny tematicky a je uvedeno vždy více způsobů řešení s příslušným komentářem. Poslední uvedená metoda řešení u každé úlohy je zaměřena na využití definovaných vztahů a odpovídá středoškolské úrovni. Naopak první, příp. další, metody řešení odpovídají úrovni na základní škole.

Využity jsou zejména metody znázornění pomocí obrázku, výpisu všech možností s příslušným komentářem či využití logického stromu řešení. Z tohoto pohledu považujeme úlohy za obecně využitelné dle potřeby na základní či střední škole, v neposlední řadě mohou sloužit jako dobrá průprava pro kurz pravděpodobnosti při studiu na vysoké škole.

Žákům, resp. studentům, by měl být ponechán dostatečný prostor pro vlastní objevování způsobů řešení.

4.1 KOMBINATORICKÁ PRAVIDLA

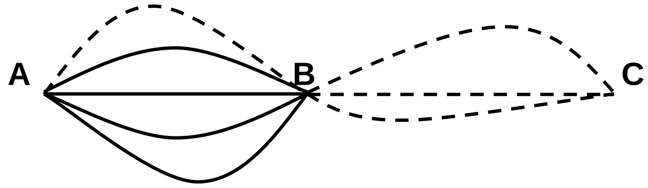
K1 *Z města A do města B vede pět cest, z města B do C vedou tři cesty. Určete počet cest, které vedou z A do C a přitom procházejí B.*



Obr. K1a Cesty

<u>1. řešení</u> ***- kombinatorické pravidlo součtu***

Každá cesta z města **A** do města **B** má 3 možnosti, jak pokračovat v cestě do města **C** (viz Obr. K1b). Použitím kombinatorického pravidla součtu dostaneme 15 možností: (3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15).



Obr. K1b Cesty z A do C

<u>2. řešení</u> - *kombinatorické pravidlo součinu*

Množina $\mathbf{M}_1$ všech cest z **A** do **B** je pětiprvková, množina $\mathbf{M}_2$ všech cest z **B** do **C** je tříprvková. Počet prvků množiny všech uspořádaných dvojic

$$\left\{\left[m_1, m_2\right], m_1 \in \mathrm{M}_1, m_2 \in \mathrm{M}_2\right\}$$

je roven 5, což představuje počet všech cest z **A** do **B**; taktéž $3 \cdot 5 = 15$.

K2 *Z dvanácti slov mužského rodu, devíti ženského a deseti středního rodu, máme tvořit trojice slov po jednom slově z mužského, ženského a středního rodu. Kolika způsoby lze provést výběr?*

<u>Řešení</u> - *kombinatorické pravidlo součinu*

Z mužského rodu máme na výběr 12, z ženského 9 a středního 10 možností. Podle kombinatorického pravidla součinu existuje

$12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$ způsobů.

K3 *V košíku leží 12 jablek a 10 hrušek. Jirka si z něho vybere jablko nebo hrušku; potom si Naďa vybere ze zbývajících 1 jablko a 1 hrušku.*
V kterém případě má Naďa více možností na výběr?

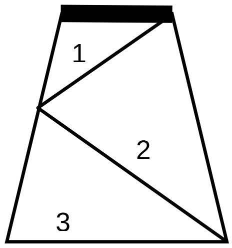
<u>Řešení</u> - *kombinatorické pravidlo součinu*

Jestliže si Jirka vezme jablko, pak bude mít Naďa $11 \cdot 10 = 110$ způsobů výběru.
Pokud si Jirka vybere hrušku, pak má Naďa $12 \cdot 9 = 108$ způsobů výběru.
Takže více možností výběrů bude Naďa mít, pokud si Jirka vybere jablko, protože

$$11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$$

4.2 ÚLOHY NA VYUŽITÍ PERMUTACÍ

P1 *Lenka si chtěla ušít sukni (viz Obr. P1) ze tří barevných dílů a to z červeného, žlutého a oranžového. Přemýšlela, jak trojúhelníky na sukni poskládat.*
Kolik má Lenka možností?



Obr. P1 Sukně

1. řešení

Vypíšeme všechny možnosti uspořádání barev na sukni. Můžeme vypisovat jen začáteční písmena barev: **O**ranžová, **Č**ervená, **Ž**lutá.

Pro první trojúhelník zvolíme oranžovou barvu, pro druhý červenou a pro poslední žlutou. Barvy systematicky prohazujeme a jednotlivé možnosti zaznamenáme do tabulky/schématu:

1. **O, Č, Ž**	3. **Č, Ž, O**	5. **Ž, Č, O**
2. **O, Ž, Č**	4. **Č, O, Ž**	6. **Ž, O, Č**

Tab. P1 Možnosti uspořádání

2. řešení ***- kombinatorické pravidlo součinu***

První trojúhelník můžeme vybírat ze tří barev (oranžové, žluté, červené), na druhý trojúhelník už jen ze dvou zbývajících barev (červená, oranžová; červená, žlutá; žlutá, oranžová) a na poslední trojúhelník zůstane poslední jedna barva. To znamená

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností.

3. řešení - *logický strom*

Jednotlivé možnosti můžeme zaznamenat pomocí logického stromu možností. Barvy jsou opět označeny počátečními písmeny: **O**ranžová, **Č**ervená, **Ž**lutá.

O	**Č**	**Ž**	**O, Č, Ž**
	Ž	**Č**	**O, Ž, Č**
Č	**O**	**Ž**	**Č, O, Ž**
	Ž	**O**	**Č, Ž, O**
Ž	**O**	**Č**	**Ž, O, Č**
	Č	**O**	**Ž, Č, O**

6 možností pro kombinaci barev

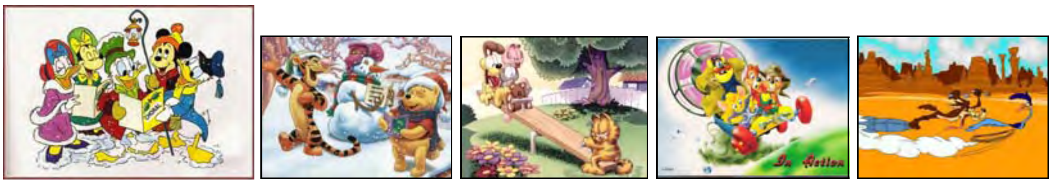
4. řešení - *permutace bez opakování*

Tvoříme všechna různá pořadí tří různých prvků bez opakování:

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Odpověď: Pro různou kombinaci barev má Lenka 6 možností.

P2 *Karolína dostala od kamarádek 5 různých obrázků (viz Obr. P2). Chce si je pověsit na stěnu vedle sebe. Přemýšlí, jak obrázky uspořádat. Kolika způsoby může obrázky vedle sebe pověsit, jestliže největší má viset uprostřed?*



Obr. P2 Obrázky

1. řešení

Vypíšeme všechny možnosti. Obrázky si očíslujeme od 1 do 5. Prostřední obrázek musí být největší (Obr. P2a):

1 **2** **3** **4** **5**

Obr. P2a Očíslované obrázky

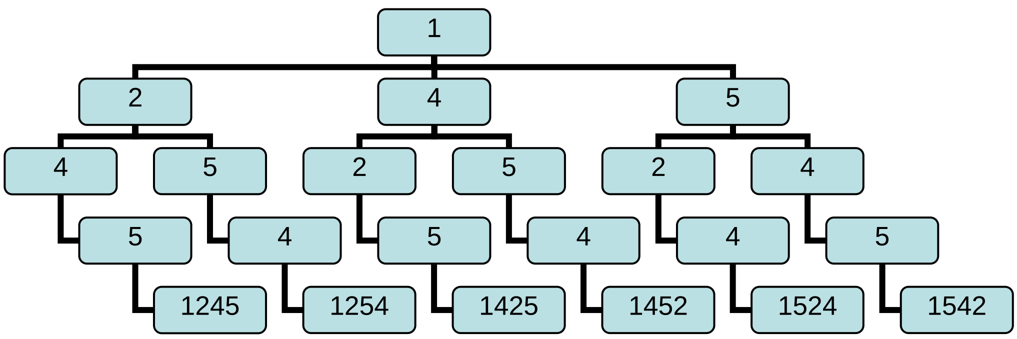
Na první místo si zvolíme jeden z obrázků, zbylé tři obrázky vzájemně prohazujeme. Z prostředním obrázkem **3** nehýbeme, stojí stále na stejném místě. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možnosti. Počet možností v každém sloupci odpovídá počtu permutací bez opakování ze tří prvků.

Tab. P2 Řazení obrázků

12345	**21345**	**41325**	**51324**
12354	**21354**	**41352**	**51342**
14325	**24315**	**42315**	**52314**
14352	**24351**	**42351**	**52341**
15324	**25314**	**45312**	**54312**
15342	**25341**	**45321**	**54321**

2. řešení - ***logický strom***

Využijeme očíslování dle Obr. P2a). Třetí obrázek bude stále na stejném místě, proto ho nebudeme vypisovat a vypíšeme pouze krajní možnosti.



Obr. P2b Logický strom

Vzájemným prohozením 1 a 2, dostaneme dalších 6 možností. To samé uděláme pro 1 a 4, 1 a 5;   celkem tedy existuje 6 + 6 + 6 + 6 = 24 možností.

3. řešení - ***permutace bez opakování***

Jedná se o různé uspořádání 4 prvků (obrázky **1**, **2**, **4**, **5**) neboli o permutaci ze čtyř prvků bez opakování:

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Odpověď: Existuje celkem 24 způsobů, jak pověsit obrázky na stěnu.

P3 *Skupinka dvou dívek a dvou chlapců dostala 4 různé knížky, které si měli mezi sebou rozdělit. Kolika možnostmi mohli knížky rozdělit?*

<u>1. řešení</u> - *tabulka*

Vypíšeme si všechny možnosti pomocí tabulek. Dívky a chlapce si pojmenujeme např. Karel, Martin, Petra, Tereza. Knížky si označíme písmeny **A**, **B**, **C**, **D**. Do prvního sloupce v tabulce vypíšeme jména dívek a chlapců. Pořadí jmen zanecháme ve všech tabulkách stejné, pro lepší orientaci v tabulce budeme měnit pouze knížky.

V Tab. P3a) budeme přiřazovat Karlovi vždy knížku A. Martin má v prvním sloupci „možnosti" na výběr tři knížky (**B**, **C**, **D**); když mu zvolíme např. **B**, má Petra už jen ze dvou možností (**C**, **D**). Zvolíme-li knížku **C**, na Terezu zbude knížka **D**. V druhém sloupci opět necháme Karlovi knížku **A**, ale také Martinovi knížku **B** a jen Petra z Terezou si knížky prohodí. V tomto systému pokračujeme, dokud nevyčerpáme všechny možnosti.

Tab. P3 a) Karel knížka A

Jména	Možnosti					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Karel	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**
Martin	**B**	**B**	**C**	**C**	**D**	**D**
Petra	**C**	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**
Tereza	**D**	**C**	**D**	**B**	**C**	**B**

Tab. P3 b) Karel knížka B

Jména	Možnosti					
	7.	8.	9.	10.	11	12.
Karel	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
Martin	**A**	**A**	**C**	**C**	**D**	**D**
Petra	**C**	**D**	**A**	**D**	**A**	**C**
Tereza	**D**	**C**	**D**	**A**	**C**	**A**

Tab. P3 c) Karel knížka C

Jména	Možnosti					
	13.	14.	15.	16.	17.	18.
Karel	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**
Martin	**B**	**B**	**D**	**D**	**A**	**A**
Petra	**A**	**D**	**B**	**D**	**B**	**A**
Tereza	**D**	**A**	**D**	**B**	**A**	**B**

Tab. P3 d) Karel knížka D

Jména	Možnosti					
	19.	20.	21.	22.	23.	24.
Karel	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**
Martin	**B**	**B**	**C**	**C**	**A**	**A**
Petra	**C**	**A**	**B**	**A**	**B**	**C**
Tereza	**A**	**C**	**A**	**B**	**C**	**B**

<u>2. řešení</u> - *logická úvaha*

Úlohu vyřešíme logickou úvahou. Nemusíme vypisovat všechny možnosti, ale vypíšeme si jen jednu z tabulek (viz 1. řešení). Zjistíme, že pokud necháme jednomu jménu stále stejnou knížku, vyjde 6 možností. Knížky jsou čtyři (**A**, **B**, **C**, **D**), takže celkem existuje 6 + 6 + 6 + 6 = 24 možností.

<u>3. řešení</u> - *permutace bez opakování*

Jedná se o pořadí 4 prvků bez opakování.

$$P(4) = 4! = 24$$

Odpověď: Celkový počet možností je 24.

P4 *Petr si chtěl odemknout zámek na kole. Zapomněl však číselný kód. Pamatoval si jen, že kód obsahuje tři 1, jednu 8 a jednu 9. Kolik měl možností pro sestavení číselného kódu?*

<u>1. řešení</u> – *výpis všech možností*

Vypíšeme všechny možnosti číselného kódu se třemi 1 a jednou 8 a 9 . Na první tři místa si zvolíme 1 a dále 8 a 9, které můžeme vzájemně prohodit a vyjde tak druhá možnost. Dále vyměníme jedničku ze třetího místa za 9. Čtvrtou možností je, že provedeme opět jen výměnu 8 za 9 a 9 za 8. atd.

Jednotlivé možnosti																			
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	9	8	9	8	9	8	9
1	1	1	1	1	1	8	9	8	9	8	9	1	1	1	1	1	1	9	8
1	1	9	8	8	9	1	1	9	8	1	1	1	1	1	1	9	8	1	1
8	9	1	1	9	8	1	1	1	1	9	8	1	1	9	8	1	1	1	1
9	8	8	9	1	1	9	8	1	1	1	1	9	8	1	1	1	1	1	1

Tab. P4 Možnosti kódů

<u>2. řešení</u> – *permutace s opakováním*

Jedná se o permutaci 5 prvků s opakováním ze 4 daných, přičemž se první prvek opakuje 3krát:

$$P'_{3,1,1}(5) = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Odpověď: Existuje celkem 20 možností číselného kódu.

P5 *Určete, kolik různých slov (anagramů) bez ohledu na jejich význam lze sestavit z písmen jména KATKA?*

1. řešení - *výpis všech možností*

Vypíšeme všechny možnosti. Postupujeme podobně jako u příkladu *P4 - 1. řešení*.

K	K	A	A	T
K	K	A	T	A
K	K	T	A	A
K	T	K	A	A
K	T	A	K	A
K	T	A	A	K
K	A	T	A	K
K	A	T	K	A
K	A	K	T	A
K	A	K	A	T
K	A	A	K	T
K	A	A	T	K

A	K	A	K	T
A	K	A	T	K
A	T	A	K	K
A	A	T	K	K
A	K	T	A	K
A	K	T	K	A
A	T	K	K	A
A	T	K	A	K
A	A	K	T	K
A	A	K	K	T
A	K	K	A	T
A	K	K	T	A

T	K	K	A	A
T	K	A	K	A
T	K	A	A	K
T	A	A	K	K
T	A	K	A	K
T	A	K	K	A

Tab. P5 Anagramy

2. řešení - *permutace s opakováním*

Jedná se o permutaci pěti prvků s opakováním z tří daných, přičemž se první a druhý prvek opakují 2krát.

$$P'_{2,2,1}(5) = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2!} = \frac{60}{2} = 30$$

Odpověď: Z písmen slova KATKA lze sestavit 30 anagramů.

P6 *Určete počet anagramů, které lze získat z písmen slova ACONCAGUA (nejvyšší hora Jižní Ameriky).*

<u>1. řešení</u> ***- logická úloha***

Metoda výpisu všech možností není vhodná pro vetší počet prvků. Proto tento příklad vyřešíme logickou úvahou.

Slovo ACONCAGUA má 9 písmen: 3xA, 2xC, ostatní písmena jsou po jednom. Vezmeme v úvahu, že žádné písmeno se neopakuje. Na prvním místo vybíráme jedno písmeno z 9 možností, na druhé místo z 8 možností, na třetí místo ze 7 možností atd. Užitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme 362 880 možností. Uvažujme nyní A, které se opakuje třikrát. Zvolíme A = A1 = A2 = A3. V Tab. P6: AAA jsou vybrané dvě možnosti, na kterých je vidět, že anagram se nezmění. Užitím kombinatorického pravidla součinu zjistíme, že těchto možností je celkem 6: na první místo vybírám ze tří možností (A_1, A_2 , A_3) na druhé ze dvou a na třetí zbude jedna možnost, tj. 3 · 2 · 1 = 6 možností. Proto součet 362 880 vydělíme 6 a získáme 60 480 anagramů. Stejnou úvahu provedeme pro C, které se ve slově opakuje dvakrát. Celkový počet anagramů je tedy 60 480 : 2 = 30 240.

Tab. P6 AAA

A_1	**A_1**	**A_3**	**C**	**C**	**N**	**O**	**G**	**U**
A_3	**A_2**	**A_1**	**C**	**C**	**N**	**O**	**G**	**U**
				…				

<u>2. řešení</u> ***- permutace s opakováním***

Jedná se o permutaci 9 prvků s opakováním z daných 6 prvků, přičemž se první prvek opakuje 3-krát, druhý 2-krát a třetí, čtvrtý, pátý a šestý prvek jsou po jednom.

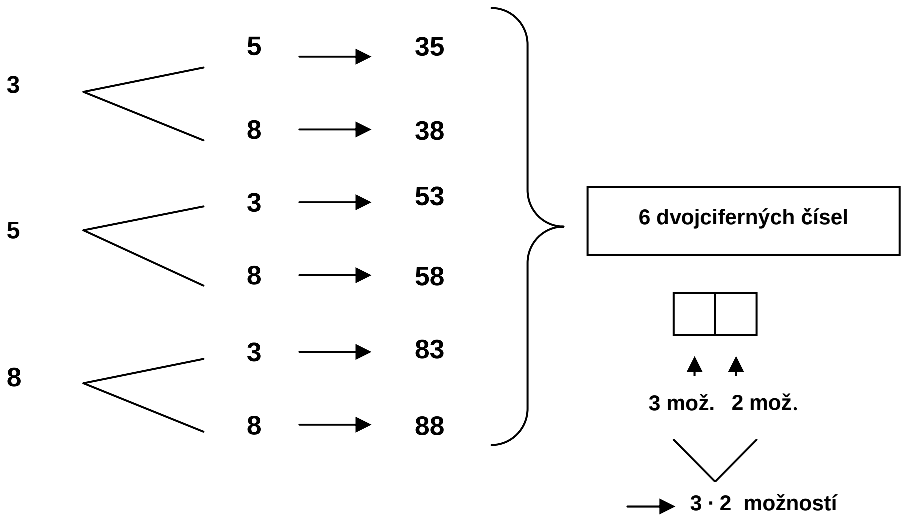
$$P'_{3!2!1!1!1!\,1!}(9) = \frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{60480}{2} = 30240$$

Odpověď: Ze slova ACONCAGUA můžeme vytvořit 30 240 anagramů.

4.3 ÚLOHY NA VYUŽITÍ VARIACÍ

V1 *Kolik dvouciferných čísel lze sestavit z číslic 3, 5, 8? Žádná číslice se neopakuje.*

<u>1. řešení</u> - *logický strom*



V řešení vypozorujeme též kombinatorické pravidlo součinu. Na místa desítek volíme jednu ze 3 číslic a na místa jednotek volíme ze zbylých 2 číslic: 3 · 2 = 6 dvojciferných čísel.

<u>2. řešení</u> - výpis všech možností

Vypíšeme všechny možnosti. Na první místo si zvolíme jednu z číslic a zbývající dvě postupně prohodíme.

$$\left.\begin{array}{l} 35,\ 38 \\ 53,\ 58 \\ 83,\ 85 \end{array}\right\}\ \text{6 dvojciferných čísel}$$

<u>3. řešení</u> - *variace bez opakování*

Jedná se o 2-jice tvořené z 3-prvkové množiny, přičemž se žádný prvek v 2-jici neopakuje.

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \cancel{1!}}{1!} = 3 \cdot 2 = 6\text{, resp. } V_2(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Odpověď: Dvojciferných čísel sestavených z číslic 3, 5, 8 je šest.

V2 *Kolik dvouciferných čísel lze sestavit z číslic 0, 2, 6, 9? Žádná číslice se neopakuje.*

➤ ***Poznámka:***

Hned na začátku řešení si musíme uvědomit: žádné dvouciferné číslo nezačíná 0. ➤

<u>1. řešení</u>

Vypíšeme všechny možnosti. Na první místo si zvolíme jednu z číslic různou od nuly a zbývající tři postupně prohodíme:

20, 26, 29; 60, 62, 69; 90, 92, 96 …… celkem 9 možností

<u>2. řešení</u> *- kombinatorické pravidlo součinu*

3 · 3

Na druhé místo můžeme volit také jen ze tří číslic, protože jedna číslice už stojí na prvním místě.

Na první místo můžeme zvolit jen 3 číslice (2, 6, 9).

Podle kombinatorického pravidla součinu existuje celkem $3 \cdot 3 = 9$ možností.

<u>3. řešení</u> *- variace bez opakování*

Tvoříme dvojice ze čtyř prvků bez opakování. Jedná se o 2-člennou variaci ze 4 prvků (0, 2, 6, 9). Protože žádné dvojciferné číslo nezačíná 0, musíme odečíst všechna čísla, kde stojí nula na prvním místě vytvořeného čísla.Taková čísla jsou tři (02, 06, 09).

$$V_2(4) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Počet všech hledaných dvojciferných čísel je $V_2(4) - 3 = 9$.

Odpověď: Z číslic 0, 2, 6, 9 lze sestavit devět dvojciferných čísel, u nichž se neopakují cifry.

V3 *Paní Nováková přijde do malého květinářství. Chce si nechat uvázat kytici ze dvou druhů květin. V květinářství mají na výběr z 10 druhů květin, ale paní Novákové se karafiáty a narcisy nelíbí, takže bude kombinovat z ostatních květin. Kolik je možností uvázání kytice pro pani Novákovou?*

<u>1. řešení</u> - *kombinatorické pravidlo součinu*

Paní Nováková chce jen dva druhy. První květinu může vybírat z 8 druhů a druhou už jen ze 7 druhů. Dostáváme $8 \cdot 7 = 56$ možností.

<u>2. řešení</u> - *výpis všech možností*

Vypíšeme všechny možnosti. Z 10 druhů vybíráme jen z osmi. Květiny si označíme písmeny A, B, C, D, E, F, G, H. Ke každé z 8 květin máme na výběr ze 7 zbylých květin.

A - B, C, D, E, F, G, H … 7 možností
B - A, C, D, E, F, G, H … 7 možností
C - A, B, D, E, F, G, H … 7 možností
D - A, B, C, E, F, G, H … 7 možností
E - A, B, C, D, F, G, H … 7 možností
F - A, B, C, D, E, G, H … 7 možností
G - A, B, C, D, E, F, H … 7 možností
H - A, B, C, D, E, F, G … 7 možností

7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 56

3. řešení - variace bez opakování

Jedná se o *k*-tice tvořené z *n*-prvkové množiny, $k = 2$ a $n = 8$, přičemž se žádný prvek neopakuje.

$$V_2(8) = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Odpověď: Existuje 56 možností uvázání kytice.

V4 *Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se rozvrh skládat ze šesti různých vyučovacích hodin.*

<u>1. řešení</u> - *logická úvaha*

Je dvanáct předmětů a šest hodin. První hodinu volíme z 12 předmětů, druhou hodinu z 11, třetí z 10, … , atd. až šestou z 7 předmětů. Užitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$ způsobů pro sestavení rozvrhu.

<u>2. řešení</u> - *variace bez opakování*

Jedná se o šestice tvořené z dvanáctiprvkové množiny, přičemž se žádný prvek v šestici neopakuje (na pořadí nezáleží).

$$V_6(12) = \frac{12!}{6!} = 665280$$

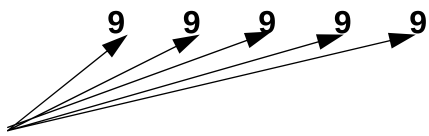
Odpověď: Jeden vyučovací den skládající se ze šesti různých předmětů lze sestavit 665 280 způsoby.

V5 *Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici; těchto číslic je na každém kotouči devět (1, …, 9).*

A. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo?
B. Stačily by k otevření zámku „3 dny“, jestliže jednu kombinaci číslic nastavujeme 4s?

<u>1. řešení</u> - kombinatorické pravidlo součinu

***1. řešení A*:**



Na každé místo kotouče můžeme zvolit jednu číslici z devíti možných (1, …, 9). Pro celkový počet možností získáme

$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = 59\,049$ možností.

2. řešení A - variace s opakováním

Jedná se o pětici tvořenou z 9tiprvkové množiny, přičemž prvky se v pětici opakují.

$$V'_5(9) = 9^5 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59\,049.$$

Odpověď: Největší možný počet pokusů je 59 049.

Řešení B:

3 dny ……259 200s (1min = 60s; 1h = 3600s; 1den = 86 400s)

1 kombinace trvá……4 sec

počet kombinací………...59 049

59049 · 4 = 236 196 sec

***Odpověď*:** Protože 259 200 sec > 236 196 sec, k otevření zámku by 3 dny stačily**.**

4.4 ÚLOHY NA VYUŽITÍ KOMBINACÍ

C1 *Ve společnosti šesti osob si přiťukl sklenkou každý s každým. Kolik cinknutí se celkem ozvalo? (Při každém přiťuknutí se ozvalo cinknutí a žádná dvě cinknutí nesplynula.)*

1. řešení - ***tabulka***

Vypíšeme všechny možnosti cinknutí do tabulky. Osoby označíme písmeny A, B, C, D, E, F. V tabulce tvoříme dvojice, které si spolu přiťukly. Dvojice se nesmí opakovat.

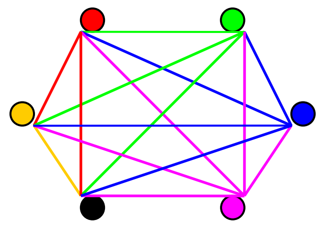
Osoby	A	B	C	D	E	F
A		AB	AC	AD	AE	AF
B			BC	BD	BE	BF
C				CD	CE	CF
D					DE	DF
E						EF
F						

Tab. C1: Přiťuknutí

2. řešení – ***užití grafu***

Sestrojením neorientovaného grafu na sedmi uzlech získáme počet všech cinknutí. Spojnice představují přiťuknutí, uzly jednotlivé osoby.

počet čar = počet cinknutí



Obr. C1 Přiťuknutí

3. řešení - ***kombinace bez opakování***

Hledáme počet všech dvojic vytvořených ze šesti prvků, na pořadí prvků nezáleží a žádný prvek se ve dvojici neopakuje:

$$C_2(6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Odpověď: Celkem bylo slyšet 15 cinknutí.

C2 *Na fotbalovém turnaji devátých tříd se setkalo 8 mužstev. Každé mužstvo hrálo s každým mužstvem 1 zápas. Kolik zápasů se v tomto turnaji odehrálo?*

1. řešení - ***tabulkové schéma***

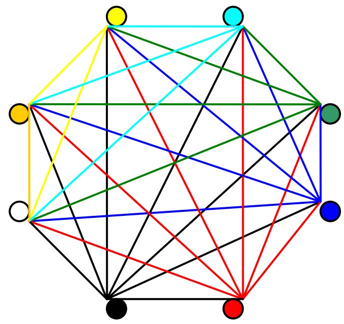
Vypíšeme všechny zápasy pomocí tabulky. Mužstva si pojmenujeme podle jmen kapitánů: **P**ETR - **P**, **H**ONZA - **H**, **M**IREK - **M**, **J**AKUB - **J**, **V**AŠEK - **V** , **L**IBOR - **L**, **D**AN - **D**, **K**AREL - **K**

	P	H	M	J	V	D	K
P		**P – H**	**P – M**	**P – J**	**P - V**	**P – D**	**P – K**
H			**H – M**	**H – J**	**H - V**	**H – D**	**H – K**
M				**M – J**	**M - V**	**M – D**	**M – K**
J					**J - V**	**J – D**	**J – K**
V						**V – D**	**V - K**
D							**D - K**
K							

Tab. C2 Mužstva

2. řešení - ***grafické řešení*** (viz úloha C1 - 2. řešení)

Uzly grafu (barevné puntíky) značí mužstva a spojnice jednotlivé zápasy. Každý musí hrát s každým, a proto z každého uzlu grafu musí směřovat spojnice ke všem ostatním.



Obr. C2 Mužstva

➤ ***Poznámka:***

V případě většího počtu prvků - uzlů v grafu - se graf a tím i řešení stává nepřehledným a je lepší zvolit jinou metodu řešení. ➤

3. řešení – ***kombinace bez opakování***

Jedná se 2- prvkovou podmnožinu dané 8-prvkové množiny, na pořadí prvků nezáleží a žádný se v ní neopakuje.

$$C_2(8) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Odpověď: V tomto turnaji se odehrálo 28 zápasů.

C3 *Herní systém hokejového turnaje pro deset mužstev spočívá v tom, že v každé ze dvou skupin po pěti družstvech sehraje každé s každým jeden zápas. První dvě mužstva z obou skupin postoupí do finále, kde opět každé s každým sehraje jeden zápas. Avšak s výjimkou družstev, která již spolu hrála ve skupině. Určete celkový počet zápasů v turnaji.*

<u>1. řešení</u>

Mužstva jsou rozdělena na dvě skupiny po pěti. Označíme si je např. v první skupině **A**, **B**, **C**, **D**, **E** a v druhé skupině **K**, **L**, **M**, **N**, **O**.

1. skupina	**2. skupina**
A B C D E	**K L M N O**
A – B, C, D, E	**K – L, M, N, O**
B – C, D, E	**L – M, N, O**
C – D, E	**M – N, O**
D – E	**N – O**
A	**K**
B	**L**

Tab. C3 Hokejový turnaj

V Tab. C3 je vidět, že v každé skupině proběhne 10 zápasů (mužstvo A hraje s B, C, D, E, mužstvo B hraje s C, D, E, (s mužstvem A již ne proto, že by s ním hrálo podruhé), atd.. Stačilo by zjistit počet zápasů jen u jedné skupiny, protože se jedná o skupiny se stejným počtem mužstev a stejnými podmínkami. Celkem se uskuteční 20 zápasů. První dvě mužstva z obou skupin postoupí do finále, kde opět každé s každým sehraje jeden zápas. Avšak s výjimkou družstev, která již spolu hrála ve skupině. Nezáleží na pořadí (o jaké mužstvo jde). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že vyhrála mužstva A, B, K, L. Musí tedy ještě proběhnout 4 zápasy, a to mezi A - K, A - L a B - K, B – L. Zápasy A - B, K - L již proběhly v příslušné skupině.

Celkový počet zápasů je 20 + 4 = 24.

<u>2. řešení</u> ***- kombinace bez opakování***

Počet zápasů v každé skupině je dán kombinací dvou prvků bez opakování z daných pěti. Ve finále počítáme 2-člennou kombinaci ze čtyř prvků (4 mužstva ve finále), ale musíme odečíst dva zápasy, které již proběhly ve skupině:

$$2 \cdot C_2(5) + C_2(4) - 2 = 2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} - 2 = 24$$

Odpověď: V turnaji se uskutečnilo celkem 24 zápasů.

C4 *V obchodě měli 5 druhů lízátek. Kolika způsoby mohla Katka koupit 3 lízátka?*

<u>1. řešení</u> - *logická úvaha*

Lízátka si označíme **A**, **B**, **C**, **D**, **E**.

1. Vybereme jen jeden druh. Protože máme 5 druhů lízátek (A, B, C, D, E), je 5 možností výběru:

A	**A**	**A**
B	**B**	**B**
⋮	⋮	⋮
E	**E**	**E**

2. Dva druhy budou stejné a třetí jiný. Dvě lízátka jsou stejná a to třetí vybíráme ze čtyř zbylých druhů lízátek. Místo A zvolíme B a další čtyři možnosti, druhů je pět, celkem tedy $4 \cdot 5 = 20$ možností

A	**A**	**B**	**B**	**B**	**A**	**…**
		C			**C**	
		D			**D**	
		E			**E**	

3. Každé lízátko je jiné. Vypíšeme všechny možné případy. První - A, B, C; druhý - necháme A, B a dáme D;…

A	**B**	**C**
		D
		E
A	**C**	**D**
		E
A	**D**	**E**
B	**C**	**D**
		E
B	**D**	**E**
C	**D**	**E**

Celkový počet možností: $5 + 20 + 10 = 35$.

<u>2. řešení</u> - *kombinace s opakováním*

Jedná se o 3člennou kombinaci s opakováním z daných 5 prvků.

$$C'_3(5) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Odpověď: Celkem existuje 35 možností výběru lízátek.

4.5 NÁROČNĚJŠÍ ÚLOHY

N1 *Určete, kolika způsoby je možné přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly.*

1. řešení - ***kombinatorické pravidlo součinu***

Slovo BATERKA obsahuje celkem 7 písmen, z toho 3 samohlásky (2 x A, 1 x E) a 4 souhlásky (B, T, R, K). Aby se střídaly souhlásky a samohlásky, musí být na prvním místě souhláska:

S M S M S M S

S - souhláska
M - samohláska

Schéma N1 BATERKA

Souhlásky **S** jsou 4 a každá jiná. Na první místo můžu vybírat ze 4, pak ze 3, dále ze 2, nakonec z 1. Podle kombinatorického pravidla součinu existuje 4 · 3 · 2 · 1 = 24 možností, jak srovnat souhlásky. Dále máme 3 samohlásky **M**, ale dvě jsou stejné (A). Pro uspořádání samohlásek existují následující 3 možnosti: AAE, AEA, EAA. Podle kombinatorického pravidla součinu pro kombinaci samohlásek a souhlásek existuje 24 · 3 = 72 způsobů.

2. řešení - ***permutace s a bez opakování***

Jedná se o permutaci bez opakování pro souhlásky ($P(4) = 4!$ možností) a permutaci s opakováním pro samohlásky ($P'_2(3) = 3!/2!$ možností). Dále použijeme kombinatorické pravidlo součinu.

$$P(4) \cdot P'_2(3) = 4! \cdot \frac{3!}{2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 72$$

Odpověď: Při zachování střídání souhlásek a samohlásek lze písmena slova BATERKA přemístit 72 způsoby.

N2 *Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7.*

1. řešení - *logická úvaha*

Úlohu vyřešíme pomocí částečného výpisu možností. Každý trojúhelník vyjádříme trojicí ve tvaru např. (4 – 4 – 4).

Rovnostranné trojúhelníky: (4-4-4); (5-5-5); (6-6-6); (7-7-7) **4 možnosti**

Rovnoramenné trojúhelníky:

(4-4- •)
5 6 7

(5-5- •)
4 6 7

(6-6- •)
4 5 7

(7-7- •)
4 5 6

12 možností
(výpočet: 4 · 3)

Různostranné trojúhelníky: (4-5-6); (4-5-7); (4-6-7); (5-6-7) **4 možnosti**

Celkový počet možností: 4 + 12 + 4

2. řešení - *kombinace s opakováním*

Jedná se o 3člennou kombinaci s opakováním ze 4 prvků:

$$K'_3(4) = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

Odpověď: Počet všech možných trojúhelníků je 20.

N3 *Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze cifry 1, 2, 3, 4, 5. Číslice se mohou opakovat.*

<u>1. řešení</u> - *kombinatorické pravidlo součinu*

Nejprve si musíme uvědomit znak dělitelnosti čtyřmi. Číslo je dělitelné čtyřmi, pokud je poslední dvojčíslí násobkem čtyř.

Dvojciferné násobky čtyř: 12,16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, …

5 možností	5 možností	•	•

Tvoříme čtveřice (• • • •), přičemž na první dvě pozice máme vždy 5 možností pro volbu z číslic 1, 2, 3, 4, 5. Podle kombinatorického pravidla součinu existuje celkem 5·5 = 25 možností výběru.

Poslední dvojčíslí může být: 12, 24, 32, 44, 52 - celkem 5 možností.

Ke každé možnosti pro první dvě místa ($5 \cdot 5 = 5^2$ možností), přidáme 5 možností na posledních dvou místech. Počet hledaných možností je $25 \cdot 5 = 125$.

<u>2. řešení</u> - *variace s opakováním*

Pro výběr cifer na první dvě pozice použijeme variace s opakováním $V_2'(5)$. Další úvaha je stejná jako u prvního řešení.

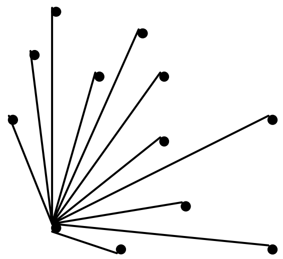
$$5 \cdot V_2'(5) = 5 \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125$$

Odpověď: Počet čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi sestavených z cifer 1, 2, 3, 4, 5 je 125.

4.6 GEOMETRICKÉ ÚLOHY

G1 *Kolik přímek určuje dvanáct různých bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce?*

1. řešení – *logická úvaha*



Obr. G1 Ilustrace přímek

Přímka je určena dvěma body. Máme celkem 12 bodů: první bod spojíme se všemi ostatními body (viz Obr. G1) a získáme 11 přímek. Další bod spojíme opět se všemi body, až na ten, který byl spojen s prvním bodem. Získáme 10 přímek.

Tímto způsobem lze pokračovat až do posledního bodu, přičemž se počet přímek vždy sníží o jednu.

Užitím kombinatorického pravidla součtu dostaneme:

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66 \text{ přímek}$$

2. řešení - *kombinace bez opakování*

Jde o 2člennou kombinaci ze 12 prvků – spojujeme vždy dva různé body z daných dvanácti bodů:

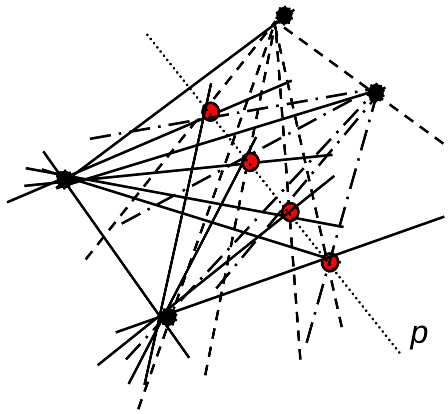
$$K_2(12) = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

Odpověď: Dvanáct různých bodů určuje 66 přímek.

G2 *V rovině je dáno 8 bodů, z nichž 4 leží v jedné přímce. Kolik přímek tyto body určují?*

<u>1. řešení</u> - *grafické řešení*

Víme, že přímka je tvořená dvěma body. První bod spojíme se všemi ostatními body, získáme 7 přímek. Pak spojíme druhý bod s ostatními kromě bodu, který už jsme spojili s prvním - celkem 6 přímek. Takto pokračujeme dále a zjistíme, že se počet přímek vždy snižuje o jednu (viz Obr. G2), celkem 28 přímek (28 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1).



Obr. G2 Přímky

Avšak ze čtyř bodů ležících v jedné přímce vytvoříme pouze jednu přímku (6 splývajících). Tyto splývající přímky musíme odečíst, avšak nesmíme zapomenout onu jednu vytvořenou přímku přičíst. Celkový počet přímek je proto

28 – 6 + 1 = 23 .

<u>2. řešení</u> - *výpis možností*

Další možností řešení je výpis všech možností. Jednotlivé body si můžeme očíslovat Pomocí dvojic bodů např. 1 - 2, 1 - 3, … získáme všechny přímky.

<u>3. řešení</u> - *kombinace bez opakování*

Přímka tvořená dvěma body (2-členná kombinace z 8 prvků), od které odečteme 2-člennou kombinaci ze čtyř prvků (4 body ležící v jedné přímce) a přičteme přímku, v níž dané čtyři body leží.

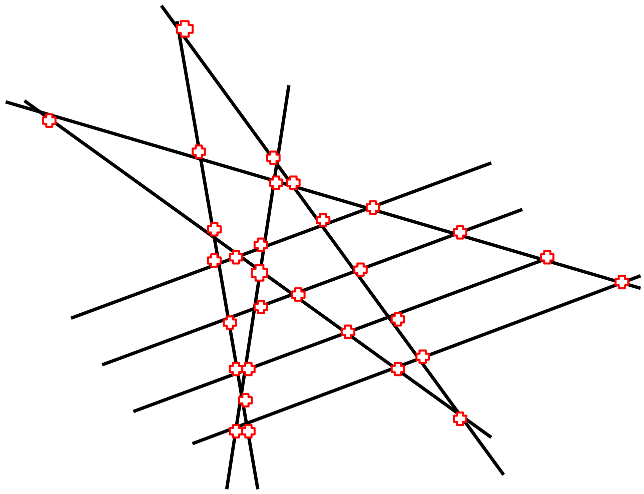
$$K_2(8)-K_2(4)+1=\binom{8}{2}-\binom{4}{2}+1=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}-\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}+1=28-6+1=23$$

Odpověď: Osm různých bodů určuje 23 přímek.

G3 *Určete, v kolika bodech se protíná 9 přímek v rovině, jestliže čtyři jsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem.*

1. řešení ***- grafické řešení***

Narýsujeme 4 přímky, které musí být rovnoběžné. Doplníme zbylé různoběžné přímky, tak aby žádné tři neprocházely týmž bodem. Sečteme všechny průsečíky.



Obr. G3 Průsečíky přímek

2. řešení **-** *kombinace bez opakování*

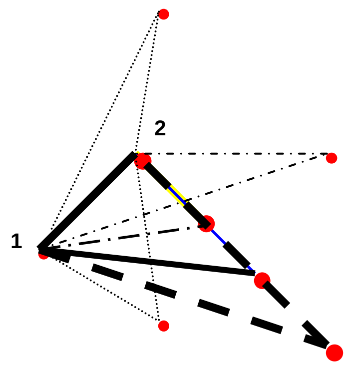
Počítat budeme 2 člennou kombinaci z 9 prvků od které odečteme 2člennou kombinaci ze 4 prvků (rovnoběžky se neprotínají, proto nezískáme $\binom{4}{2}$ průsečíky).

$$K_2(9) - K_2(4) = \binom{9}{2} - \binom{4}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = 36 - 6 = 30$$

Odpověď: 9 přímek, z nichž 4 jsou rovnoběžné, se protíná ve 30 bodech.

G4 *V jedné rovině leží 8 bodů, z nichž 4 leží v jedné přímce. Kolik tyto body určují trojúhelníků?*

1. řešení



Obr. G4 Základna 1-2

Body si očíslujeme od 1,…, 8. Poslední čtyři body budou v jedné přímce. Trojúhelník je tvořen třemi body, proto budeme vytvářet trojice bodů, např. ve tvaru (1-2-•). Počet takto vytvořených trojic je roven počtu hledaných trojúhelníků.

Na Obr. G4 jsou znázorněny všechny trojúhelníky s jednou stranou 1-2. Postupujeme systematicky, jak je zřejmé z níže uvedeného schématu G4. Tímto způsobem postupujeme, dokud nevyčerpáme všechny možnosti.

(1-2-3); (1-2-4); (1-2-5); (1-2-6); (1-2-7); (1-2-8)
(1-3-4); (1-3-5); (1-3-6); (1-3-7); (1-3-8)
(1-4-5); (1-4-6); (1-4-7); (1-4-8)
(1-5-6); (1-5-7); (1-5-8)
(1-6-7); (1-6-8)
(1-7-8)
(2-3-4); (2-3-5); (2-3-6); (2-3-7); (2-3-8)
(2-4-5); (2-4-6); (2-4-7); (2-4-8)
(2-5-6);(2-5-7)(2-5-8)
(2-6-7); (2-6-8)
(2-7-8)
(3-4-5); (3-4-6); (3-4-7); (3-4-8)
(3-5-6)(3-5-7)(3-5-8)
(3-6-7); (3-6-8)
(3-7-8)
(4-5-6); (4-5-7); (4-5-8)
(4-6-7); (4-6-8)
(4-7-8)

3. řešení ***- kombinace bez opakování***

Trojúhelník je určen třemi různými nekolineárními body – tvoříme 3-členné kombinace z osmi prvků, od nichž odečteme 3-člennou kombinaci ze čtyř prvků, protože tyto čtyři body leží v jedné přímce a netvoří tedy trojúhelník. Kdyby dané čtyři body neležely v jedné přímce, tvořily by čtyři trojúhelníky.

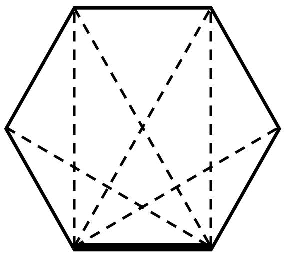
$$K_3(8)-K_3(4)=\binom{8}{3}-\binom{4}{3}+1=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}-\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}=56-4=52$$

Odpověď: Zadané body určují celkem 52 trojúhelníků.

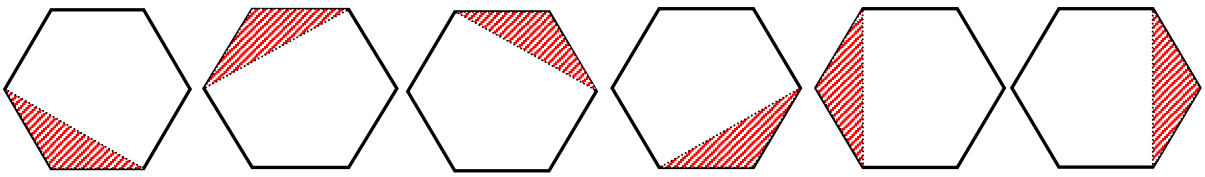
G5 *Kolik existuje trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou totožné s vrcholy daného šestiúhelníku?*

1. řešení ***- grafické řešení***

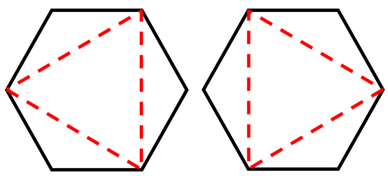
Úlohu si můžeme narýsovat (nebo načrtnout). Pokud si zvolíme jednu stranu z šestiúhelníka za základnu trojúhelníku (viz Obr. G5a), základna je vyznačena nejsilnější čárou, a spojíme postupně s vrcholy šestiúhelníku, vyjdou čtyři trojúhelníky. Jelikož šestiúhelník má šest stran (základen), tak podle kombinatorického pravidla součinu získáme 6 · 4 = 24 trojúhelníků. Šest trojúhelníků se však překrývá (viz Obr. G5b) a ty musíme odečíst (24 – 6 = 18 trojúhelníků). Nesmíme však zapomenout na trojúhelníky, které nemají základnu na žádné straně šestiúhelníku - vnitřní trojúhelníky (viz Obr. G5c). Celkový počet trojúhelníků, které mají vrcholy totožné s vrcholy daného šestiúhelníku, je tedy 18 + 2 = 20.



Obr. G5a Tvorba šestiúhelníků



Obr. G5b Překrývající se trojúhelníky



Obr. G5c Vnitřní trojúhelníky

2. řešení ***- kombinace bez opakování***

Každý trojúhelník představuje trojici vybranou ze 6 daných bodů. Jedná se tedy o tříčlennou kombinaci bez opakování ze 6 prvků.

$$K_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$$

Odpověď: Celkem existuje 20 trojúhelníků.

G6 *V prostoru je dáno 10 různých bodů. Kolik rovin tyto body určují, jestliže žádné tři neleží v jedné rovině?*

<u>1. řešení</u> - *logická úvaha*

Nejprve si musíme uvědomit, že rovina je tvořena třemi body. Body si očíslujeme od jedné do deseti. Jestliže budeme tvořit trojice a začneme např. trojicí (1 - 2 - •). Postupujeme podobně jako u příkladu G4.

Na třetí pozici vystřídáme postupně body (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Takto získáme 8 trojic neboli 8 rovin. Dále nahradíme dvojku (na druhém místě v trojici) číslem tři a na třetí místo budeme opět postupně zaměňovat body (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) - získáme dalších 7 rovin; takto můžeme pokračovat.

Rovin, které začínají jedničkou, je celkem: 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

Dále jedničku na prvním místě v trojici nahradíme dvojkou a tvoříme trojice (2 – 3 - •) Postup opakujeme jako v předchozím případě. Na posledním místě můžeme obměňovat body (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) a tím dostaneme 7 rovin. Když postupně nahradíme trojku na druhém místě všemi zbývajícími body - čísly, získáme dalších 28 možností (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1).

Další počty možných rovin, odpovídajících číslu na první pozici v dané trojici, jsou uvedeny níže:

3……6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 (na první pozici je číslo 3)
4……5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 (na první pozici je číslo 4)
5……4 + 3 + 2 + 1 = 10 …
6……3 + 2 + 1 = 6 …
7……2 + 1 = 3 …
8……1 …

Celkem 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120

<u>2. řešení</u> - ***kombinace bez opakování***

Jde o 3 člennou kombinace bez opakování z 10 prvků.

$$K_3(10) = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

***Odpověď*:** Deset bodů určuje 120 rovin.

„Milí studenti,
abyste si nemysleli, že kombinatoriku v běžném životě nepotkáte, uvedu vám, nejen pro pobavení, příklad ze života.“

Ženská kombinatorika (aneb nemám co na sebe)

Ženská kombinatorika, obdobně jako ženská logika, vychází z matematické disciplíny rozšířené o několik dalších, klasické matematice neznámých, pouček. Přibližme si ženskou kombinatoriku na příkladu:

Řekněme, že nebožačka má pracovní schůzku a chce být za šmrncovní babu. K dispozici má troje punčocháče, tři v tomto ročním období použitelné sukně (kdo by to byl řekl a tři slušná trička. Předpokládáme-li, že nebožačka má všech pět pohromadě a chce si vzít právě jedny punčocháče s jedním tričkem a sukní, nabízí takto definovaný šatník dvacet sedm možných kombinací. To není tak špatné, že?

Jenže tady do toho vstupuje ženský prvek:

1. Jedny punčocháče jsou proužkaté a jedna sukně kostkatá, což kombinaci vylučuje. (zákon o nekombinovatelnosti určitých kostek s určitými pruhy).
   Šup tři kombinace pryč.
2. Ty proužkaté punčocháče jsou navíc hnědé. A to nejde k černé elegantní sukni (pravidlo ladu a skladu)...
   A další tři kombinace fuč.
3. Pak je tu ta oranžová sukně... ta je dobrá, ale na pracovní schůzku by se hodila, leda že by šlo o konkurz na Pipi. A to nejde (koeficient přiměřenosti).
   Pryč s ní i s devíti ji zahrnujícími kombinacemi!
4. A tahle (fialová) kostkovaná sukně se nedá vzít ani s tím růžovým ani s červenobílým tričkem (princip averze barev).
   Milé čtyři kombinace, sbohem...
5. Na tělových punčocháčích se při pokusu o oblečení udělalo oko (Ne-Mehlova věta)...
   Další čtyři kombinace.
6. Takže nám tu zbývá to bílé tričko, které si ... doprčic... po Vánocích vážně vzít nemůžu (zákon o zachování hmoty).
   Tak to jsme o dvě kombinace kratší.
7. A ještě červenobílé tričko a... moment, zdá se mi to, nebo... KOČKY!
   (Pravidlo špinavé kočičí pracky) A teď ještě o dvě.

Podtrženo, sečteno: Máme tu černé punčocháče a černou sukni a k tomu růžové triko → (logický závěr) nemám co na sebe!

(Zdroj: http://shcleeba.blogspot.com)