Kapitola 5. SOUBOR ÚLOH Z KOMBINATORIKY

Základní kombinatorická pravidla

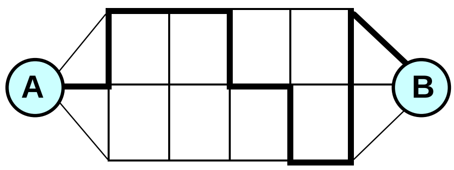
U1 Určete počet všech trojciferných přirozených čísel,
a) v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou;
b) v jejichž dekadickém zápisu se nějaká číslice vyskytuje alespoň dvakrát.

U2 Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8 × 8 vybrat dvě různobarevná pole tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.

U3 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu není nula a ze zbývajících devíti číslic se v něm každá vyskytuje nejvýše jednou.
a) Kolik z těchto čísel je větších než 9 000?
b) Kolik je menších než 3 000?

U4 Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně *n* vnitřních bodů. Určete počet trojúhelníků s vrcholy v těch bodech, jejichž žádná strana neleží ve straně čtverce ABCD.

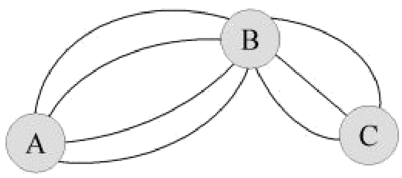
U5 Určete, kolika způsoby se lze dostat z A do B, cestujeme-li po cestách zobrazené sítě a nikdy se nevracíme směrem k místu A. Jedna z možných cest je zobrazena.



U6 Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

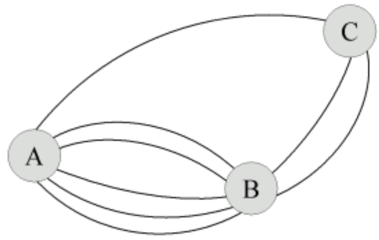
U7 Z místa A do místa B vedou čtyři turistické cesty, z místa B do C tři. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu

a) z A do C a zpět;
b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát;
c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.



U8 Z místa A do místa B vede pět cest, z místa B do místa C vedou dvě cesty a z místa A do místa C vede jedna cesta. Určete, kolika různými způsoby lze vykonat cestu:

a) z místa A do místa C přes místo B;
b) z místa A do místa C (jakkoli);
d) z místa A do místa C (jakkoli) a potom zpět do místa B (přímo), jestliže každým místem můžete projít nejvýše jednou (není možné se vracet).



Variace

U9 Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.

U10 Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin.

a) V kolika z nich se vyskytuje chemie?
b) V kolika z nich je chemie zařazena na 1. vyučovací hodinu?

U11 Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 2 a 5?

U12 Určete počet prvků, z nichž lze utvořit:

a) 240 dvoučlenných variací;
b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

U13 O telefonním čísle svého spolužáka si Vašek zapamatoval jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné pětadvaceti. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.

U14 Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 2, 3?

U15 Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici; těchto číslic je na každém kotouči devět. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo.

U16 Kolik znaků, které jsou složeny z jednoho až čtyř signálů, může obsahovat Morseova abeceda? (Signálem rozumíme "tečku" nebo "čárku".)

U17 Na panelu je r žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat. Kolik žárovek bychom potřebovali, kdybychom chtěli rozlišit 50 různých stavů?

U18 Kolik různých státních poznávacích značek pro automobily lze použít, je-li k dispozici 21 písmen a 10 číslic a značka se skládá ze tří písmen na prvních třech místech a dále ze čtyř číslic?

U19 V množině přirozených čísel řešte rovnici:

$$V'(2,x) - x \cdot V'(2,3) = 10$$

U20 Z kolika prvků lze vytvořit padesátkrát více variací třetí třídy než variací druhé třídy?

Permutace

U21 Kolika různými způsoby lze postavit do kruhu (tváří do středu):
a) 5 různých osob;
b) *m* různých osob?

Dvě rozmístění považujeme za stejná, jestliže lze jedno na druhé převést otáčením.

U22 Určete, kolika způsoby může *m* chlapců a *n* dívek nastoupit do zástupu tak, aby:
a) nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci;
b) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec;
c) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka.

U23 Kolika způsoby lze uspořádat množinu přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ tak, aby každé sudé číslo zůstalo v pořadí na sudém místě?

U24 Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven třem. Kolik z nich je sudých?

U25 Určete počet způsobů, jimiž lze na šachovnici 8×8 rozmístit všechny figurky šachové hry (bílý král, bílá dáma, 2 bílí střelci, 2 bílí jezdci, 2 bílé věže, 8 bílých pěšců + totéž černé barvy).

U26 Určete počet prvků tak, aby:
a) bylo možno z nich utvořit právě 40 320 permutací;
b) při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát;
c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil dvacetkrát.

U27 Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit šest hochů, jestliže:
a) dva chtějí sedět vedle sebe;
b) dva chtějí sedět vedle sebe a třetí chce sedět na kraji.

U28 Představte si, že zapíšete pod sebe všechny permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5; vznikne tak obdélníkové schéma, které má 120 řádek a 5 sloupců. Určete součet všech čísel v každém sloupci.

U29 Určete kolika způsoby lze přemístit písmena slova Mississippi. Kolik z nich nezačíná písmenem M?

Kombinace

U30 Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

U31 Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny.

U32 Ve skladu je 10 výrobků, mezi nimi jsou 3 vadné. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat kolekci pěti výrobků, aby:
a) všechny byly dobré,
b) byl právě jeden vadný,
c) byl nejvýš jeden vadný,
d) byl aspoň jeden vadný?

U33 Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže:
a) žádné tři body neleží na jedné přímce,
b) právě tři body leží na jedné přímce?

U34 Určete počet prvků, z nichž lze utvořit 66 dvoučlenných kombinací.

U35 V levém dolním rohu šachovnice 8 × 8 je umístěna figurka, kterou lze jedním tahem přemístit buď o jedno pole vpravo, nebo o jedno pole vzhůru. Spočtěte, kolika různými způsoby lze tuto figurku přemístit do pravého horního rohu.

U36 Určete počet prvků tak, aby:
a) počet čtyřčlenných kombinací z nich vytvořených byl dvacetkrát větší než počet dvoučlenných kombinací;
b) při zvětšení počtu prvků o jeden se počet tříčlenných kombinací zvětšil o 21.

U37 V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:
a) 15 pohledů;
b) 51 pohledů;
c) 8 různých pohledů.

U38 Určete, kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými
a) nebyl pan A;
b) nebyli zároveň pánové A a B;
c) byl aspoň jeden z pánů A, B.

U39 Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek.

U40 Jsou dány rovnoběžné (různé) přímky p, q. Na přímce p je dáno osm různých bodů, na přímce q jedenáct různých bodů. Určete počet:
a) trojúhelníků s vrcholy v daných bodech,
b) konvexních čtyřúhelníků s vrcholy v daných bodech.

U41 V obchodě mají tři druhy sirupu: jahodový, malinový a pomerančový. Určete počet všech možností nákupu pěti lahví sirupu v tomto obchodě.

U42 V železničním depu je dvacet osobních, sedm lůžkových a pět poštovních vozů. Kolik různých souprav s pěti vozy je možno v tomto depu sestavit, jestliže nezáleží na pořadí vozů v soupravě?

Pascalův trojúhelník, kombinační čísla a jejich vlastnosti

U43 Napište devátý řádek Pascalova trojúhelníku (oba tvary).

U44 Desátý řádek Pascalova trojúhelníku má tvar 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1. Odvoďte z něj následující (jedenáctý) řádek Pascalova trojúhelníku.

U45 Jediným kombinačním číslem vyjádřete následující součty:

a) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$, b) $\binom{13}{2}+\binom{13}{10}$, c) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$.

U47 V množině přirozených čísel řešte nerovnice:

a) $\binom{y+1}{2}+\binom{y+4}{2}+\binom{y+7}{2}<93$

b) $\binom{y}{2}+\binom{y+3}{2}+\binom{y+6}{2}<100$

c) $\binom{y+2}{2}\geq\binom{y}{2}+1$

U48 Vypočítejte: $\binom{18}{0}+\binom{18}{1}+\binom{18}{2}+\dots+\binom{18}{17}+\binom{18}{18}$.

U49 Odvoďte, jaký tvar má *n*-tý řádek Pascalova trojúhelníka

U50 Dopište druhou polovinu dvanáctého řádku Pascalova trojúhelníku:

1 11 55 165 330 462 …

Souhrnné úlohy

U51 Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

U52 Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?

U53 Pan Mareš vytvářel program turnaje devíti družstev. Kolik zápasů se odehraje?

U54 Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 zápasů a hráči hráli každý s každým jednou?

U55 Cyklistických závodů se zúčastnili čtyři kamarádi: Adam, Boris, Cyril, Dušan. Kolik je možných pořadí, v nichž Cyril byl alespoň o dvě místa lepší než Dušan, a Adam nebyl první?

U56 V maturitní třídě probíhá diskuse o tom, jak studenti rozdají svým profesorům pozvánky na „ztužkovací večírek“. Nakonec se dohodli, že pozvánky rozdá dvojice zástupců ze třídy tvořená jedním chlapcem a jedním děvčetem. Kolik takových dvojic připadá v úvahu, jestliže do třídy chodí 34 studentů, z toho 14 chlapců a 20 děvčat?

U57 Bez zapisování zjistěte, kolik existuje dvojciferných sudých čísel?

U58 Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná dvojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

U59 Ze šesti dětí, mezi kterými je Sylva a Slávek, se má vybrat tříčlenná skupina. Slávek však nechce být ve skupině, v níž nebude Sylva. Kolik je možností výběru?

U60 Ze skupiny deseti kosmonautů je třeba vybrat čtyřčlennou posádku. Je však nevhodné, aby určití dva kosmonauti letěli spolu. Kolik různých výběrů posádky je možno vytvořit?

U61 Na přímce p je dáno šest bodů, mimo ní dva. Kolik trojúhelníků má všechny své vrcholy mezi těmito vrcholy?

U62 V urně je šest lístků téhož tvaru, očíslovaných 1, 2, …, 6. Kolika různými způsoby je lze postupně vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

U63 Soupravu devíti různých vagónů rozpojíme ve dvou místech, čímž vzniknou z původní soupravy tři části.
a) Kolik možností takového rozpojení existuje?
b) Kolik možností je takových, že aspoň jedna ze tří částí rozdělené soupravy bude mít právě tři vagóny?

U64 Kolik je různých možností pro označení jízdenky MHD strojkem, jestliže předpokládáme, že strojky mohou děrovat jeden až devět polí?

U65 Z jistého počtu uchazečů mají být vybráni tři. Kdyby bylo uchazečů o tři méně, zmenšil by se počet možností výběru pětkrát. Kolik je uchazečů?

U66 Kolika způsoby lze pomocí mincí 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč zaplatit sumu:
a) 5 Kč, b) 10 Kč, c) 15Kč

U67 Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet tříčlenných kombinací z nich utvořených o 21. Kolik je dáno prvků?

U68 Je dáno 13 bodů v rovině, z nichž:
a) pět,
b) šest
leží na jedné přímce. Žádné další tři na jedné přímce neleží. Kolik přímek je těmito body určeno?

U69 Kolik sudých přirozených čísel lze sestavit z číslic
a) 1, 2, 3, 4, 5
b) 0, 1, 2, 3, 5
pokud se žádná číslice neopakuje?

U70 Kolik různých trojciferných čísel dělitelných třemi je možno napsat číslicemi 0, 2, 3, 4, 7, jestliže se žádná číslice neopakuje?

U71 Kolik přirozených čísel větších než 15 lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se žádná číslice neopakuje?

U72 V kupé je deset míst, pět ve směru jízdy a pět proti směru. Tři pasažéři chtějí sedět ve směru jízdy a jeden proti směru jízdy. Ostatním šesti, mezi něž patří Venoušek s maminkou, je to jedno, až na to, že Venoušek chce sedět u okna a vedle maminky. Kolika způsoby se mohou cestující usadit, aby byli všichni spokojeni?

U73 Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5:
a) právě třikrát;
b) nejvýše třikrát;
c) aspoň třikrát.

U74 Určete počet všech podmnožin:
a) pětiprvkové množiny {a, b, c, d, e},
b) osmiprvkové množiny {a, b, c, d, e, f, g, h},
c) dvanáctiprvkové množiny

U75 Kolika způsoby můžeme rozdělit 10 Kč mezi tři bratry – *Jožo, Tomáš, Vlado* – jestliže každý z nich má dostat celistvý počet mincí a alespoň jednu korunu?

U76 Kolik šesticiferných čísel zapsaných jen za pomocí jedniček a dvojek lze zapsat, pokud se nesmí dvě dvojky vyskytovat vedle sebe?

U77 Kolika způsoby je možné vylosovat 24 mužstev do šesti skupin a, b, c, d, e, f po čtyřech mužstvech? Zajímá nás nejen, kdo s kým je v jedné skupině, ale zároveň ve které ze skupin a, b, c, d, e, f jednotlivá mužstva jsou.

U78 Máme k dispozici 5 lístků, na třech z nich je napsaná cifra 1, na jednom cifra 2, na jednom cifra 3. Kolik pěticiferných čísel můžeme pomocí těchto lístečků sestavit?

U79 Na kružnici je rozmístěných 9 bodů A, B, C, D, E, F, G, H, I. Kolik existuje různých trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou z množiny { A, B, C, D, E, F, G, H, I }?

U80 Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy; k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?

U81 Určete, kolika způsoby je možno seřadit u startovací čáry osm závodních automobilů do dvou řad po čtyřech vozech, jestliže:
a) v každé řadě záleží na pořadí;
b) na pořadí v řadách nezáleží.

U82 V kupé železničního vagónu jsou proti sobě dvě lavice po pěti místech. Z deseti cestujících si čtyři přejí sedět ve směru jízdy, tři proti směru a zbývajícím třem je to lhostejné. Určete, kolika způsoby se mohou rozsadit.

U83 Kolika způsoby lze uspořádat množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$? V kolika případech bude prvek b před prvkem c? V kolika případech je prvek b na prvním místě a zároveň prvek c není na posledním místě? V kolika případech nebude prvek c ani první, ani poslední?

U84 Na maturitním večírku je 15 hochů a 12 děvčat. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat čtyři taneční páry.

U85 Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova BEROUNKA tak, aby nějaká skupina po sobě jdoucích písmen utvořila:
a) slovo BERAN;
b) slova NERO a KUBA v libovolném pořadí;
c) slova BUK a NORA v libovolném pořadí.

U86 Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 postavit pět různých figur tak, aby dvě stály na černých a tři na bílých polích.

U87 Určete počet způsobů, jimiž lze vedle sebe zapsat písmena slova KOMBINACE tak, aby v tomto pořadí byly samohlásky v abecedním pořádku.

U88 Je dán rovnostranný trojúhelník a na každé jeho straně je dáno n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků:
a) s vrcholy v daných bodech;
b) s vrcholy v daných bodech a na různých stranách daného trojúhelníku.

U89 V prostoru je dáno n bodů, z nichž p leží v téže rovině, a kromě nich už žádné čtyři body v jedné rovině neleží. Určete:
a) počet čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech;
b) počet rovin, které tyto body určují.

U90 Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3, 5, 7, 9, každá nejvýše jednou.

U91 Osm hostů se má ubytovat ve třech pokojích, které mají čísla 1, 2, 3. Pokoj č. 1 je třílůžkový, pokoj č. 2 také a pokoj č. 3 je dvoulůžkový. Kolika způsoby je možné uvedené hosty rozmístit v těchto třech pokojích?

U92 Tři děvčata − Anna, Dana a Hana − se mají rozdělit o sedm stejných růží a pět stejných tulipánů. Kolika způsoby to lze provést?

U93 Určete, kolika způsoby lze pomocí padesátihaléřových a korunových mincí zaplatit částku 6Kč, jsou-li oba druhy mincí v dostatečném množství.

U94 Určete, v kolika bodech se protíná 12 přímek v rovině, z nichž pět je rovnoběžných a žádné tři neprocházejí týmž bodem.

U95 V množině přirozených čísel řešte rovnici: $V(2,x) + K(1,x) = 256$.

U96 V množině přirozených čísel řešte nerovnici: $K(x - 2, x) < 45$.

U97 Kolik slov skládajících se z *p* písmen (tj. slov "délky *p*") lze utvořit z abecedy, která má *n* písmen?

U98 Ze sedmi kuliček, z nichž čtyři jsou modré (navzájem nerozlišitelné), jedna bílá, jedna červená a jedna zelená, máme vybrat a položit do řady pět kuliček. Kolika způsoby to lze provést?

U99 Apolloniovou úlohou se rozumí úloha sestrojit kružnici, která má tři z těchto vlastností: prochází daným bodem, dotýká se dané přímky, dotýká se dané kružnice. (Označíme-li tyto vlastnosti po řadě písmeny *B*, *p*, *k*, můžeme každou Apolloniovu úlohu zapsat pomocí trojice z těchto písmen; tak např. úloha *Bpp* značí úlohu sestrojit kružnici procházející daným bodem a dotýkající se dvou daných přímek.) Určete počet všech Apolloniových úloh.

U100 Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu třemi kostkami? (Jde o obvyklou kostku s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách.)

U101 Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků):

a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8×8;
b) na libovolné dvě řady šachovnice 8×8.

U102 Kolik třítónových akordů je možné zahrát z 8 tónů?

U103 Kolik různých optických signálů je možno dát vytahováním 5 různých barevných vlajek, je-li vždy všech pět vlajek nahoře?

U104 Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 15 \rangle$.

U105 V obchodě mají tři druhy bonbónů v sáčcích po 100g. Kolika způsoby může zákazník koupit 1 kg bonbónů?

U106 Kolik různých státních poznávacích značek z jedné série existuje s aspoň dvěma trojkami?

U107 Jsou dány cifry: 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

a) pětimístná, sudá
b) pětimístná, končící dvojčíslím 21
c) pětimístná, menší než 30 000
d) trojmístná, lichá
e) čtyřmístná, větší než 2000
f) čtyřmístná, začínající cifrou 2
g) čtyřmístná, sudá nebo končící cifrou 3
h) dvojmístná nebo trojmístná

U108 Jsou dány cifry: 0, 1, 2, 3, 4. Splňte úkoly minulé úlohy (1.8.) tak, že cifry se nesmí opakovat a číslo nemůže začínat nulou.

U109 Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

U110 Z 5 bílých a 4 červených kuliček tvoříme trojice tak, aby v každé trojici byly vždy 2 bílé a 1 červená kulička. Kolik trojic splňujících tuto podmínku lze vytvořit?

U111 V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.

a) Kolika způsoby je lze přesadit?
b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?
c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?
d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?

U112 Z kolika prvků lze vytvořit 55 kombinací druhé třídy?

U113 V turistickém oddílu "Hbitý svišť" je 10 dívek a 8 chlapců. Určete, kolika způsoby mohou sestavit volejbalový tým (má šest členů), ve kterém budou hrát:

a) právě dvě dívky.
b) maximálně dva chlapci.

U114 V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

U115 Kolik permutací z n prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$ obsahuje prvek a_1 na prvé pozici?

U116 Kolik různých hodů můžeme provést:

a) dvěma,
b) třemi různobarevnými kostkami?

U117 V prostoru jsou dány 2 mimoběžky *a*, *b*. Na přímce *a* je dáno *m* různých bodů $A_1, \dots A_m$, na přímce *b je dáno n* různých bodů $B_1, \dots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách *a*, *b*, a to v bodech A_i, B_j.

U118 Kolik úhlopříček má konvexní *n*-úhelník?

U119 Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

U120 Kolik různých signálů je možno vytvořit použitím pěti různobarevných praporků, použijeme-li:
a) pouze 3 praporky,
b) 2 praporky?

U121 Student má v knihovně 4 různé učebnice pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?

U122 V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

U123 V obchodě mají tři druhy bonbónů v sáčcích po 100g. Kolika způsoby může zákazník koupit 1 kg bonbónů?

U124 Kolika způsoby lze rozdělit 50 stejných kuliček mezi čtyři chlapce? Kolika způsoby lze toto rozdělení udělat tak, aby každý dostal alespoň jednu kuličku?

U125 Určete počet čtyřciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5.

U126 Určete, z kolika prvků lze utvořit 1 024 pětičlenných variací s opakováním.

U127 Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která můžeme napsat užitím číslic 0, 1, 2, 5, 7. Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

U128 Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?

U129 Určete, kolika způsoby lze na černá políčka šachovnice 8×8 rozmístit 12 bílých (nerozlišitelných) a 12 černých (nerozlišitelných) kostek tak, aby toto rozmístění bylo symetrické podle středu šachovnice.

U130 Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm (stejných) jablek

U131 Sešlo se pět přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

Řešení

Základní kombinatorická pravidla

U1 [a) 9·9·8 = 648, b) 900 − 648 = 252]

U2 [32 · 24 = 768]

U3 [3 024; a) 336, b) 672]

U4 [4·*n*·3]

U5 [36]

U6 [Kombinatorické pravidlo součinu: 9·9 = 81; Kombinatorické pravidlo součtu: počet všech dvojciferných čísel je 90, počet dvojciferných čísel se stejnými číslicemi je 9 (čísla 11, 22, …, 99). Označíme-li hledaný počet dvojciferných čísel s různými číslicemi *x*, pak platí: *x* + 9 = 90. Odtud dostáváme, že je *x* = 81.]

U7 [a) 4·3·3·4 = 144; b) 4·3·2·3 = 72; c)·3·1·1 = 12]

U8 [a) 10; b) 11; c) 22]

Variace

U9 [164; Návod: Sečteme počet jednociferných, dvouciferných, trojciferných a čtyřciferných čísel, sestavených podle zadání úlohy; čísla přitom nemohou začínat číslicí nula:
V(1,4) + 4·V(1,4) + 4·V(2,4) + 4·V(3,4) = 4 + 16 + 48 + 96 = 164 nebo:
[V(1,5)−1] + [V(2,5)−V(1,4)] + [V(3,5)−V(2,4)] + [V(4,5)−V(3,4)] = (5−1) + (20−4) + (60−12)
(120−24) = 4 + 16 + 48 + 96 = 164]

U10 [V(6,12) = 665 280; a) 6 · V(5,11) = 332 640, b) V(5,11) = 55 440]

U11 [V'(5,2) = 25 = 32]

U12 [a) 16; b) 5]

U13 [2·V(5,6) = 1 440]

U14 [V'(5,3) − V'(4,3) = 35 − 34 = 243 − 81 = 162]

U15 [V'(5,9) = 95 = 59 049]

U16 [V'(1,2) + V'(2,2) + V'(3,2) + V'(4,2) = 21 + 22 + 23 + 24 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30]

U17 [V'(r, 3) = 3·r]

U18 [V'(3,21) · V'(4,10) = 213·104 = 92 610 000]

U19 [{10}]

U20 [52]

Permutace

U21 [a) 24; b) (m−1)!]

U22 [a) P(*n*)·P(*m*) = *n*! *m*!; b) 2·P(*n*)·P(*m*) = 2·*n*!*m*!; c) P(*m*)·P(*n*+1) = *m*! (*n*+1)!]

U23 [(*n*!) ·2]

U24 [55 (P'(2,7) + 2 · P'(1,8) + 1); 46 (P'(2,6) + P'(1,8) + P'(1,7) + 1)]

U25 [46 (P'(2,6) + P'(1,8) + P'(1,7) + 1)]

U26 [a) 8; b) 6; c) 5]

U27 [a) 2 · P(5) = 240 b) 2 · 2 · P(4) = 96]

U28 [360]

U29 [P´(1,4,4,2) = 11!/4!·4! ·2!= 34650; P´(1,4,4,2) - P´(4,4,2) = 34 650 - 3150 = 31 500]

Kombinace

U30 [$\binom{4n}{3} - 4\binom{n}{3}$]

U31 [945]

U32 [a) K(5,7) = 21; b) K(1,3)·K(4,7) = 3·35 = 105;
c) (a) + (b) = 21 + 105 = 126; d) K(5,10) − K(5,7) = 252 − 21 = 231]

U33 [a) 15; b) 13]

U34 [12]

U35 [K(7,14) = 3 432]

U36 [a) 18; b) 7]

U37 [a) K´(15,10) = $\binom{24}{15}$ = 1 307 504, b) K´(51,10) -10 = $\binom{60}{51}$ -10 = 14 783 142 650,

c) K(8,10) = $\binom{10}{8}$ = 45]

U38 [a) $\binom{19}{10}$, b) $\binom{20}{10} - \binom{18}{8}$, c) $\binom{20}{10} - \binom{18}{10}$]

U39 [K'(4,3) · K'(6,3) = 420]

U40 [a) 748; b) 1 540]

U41 [K´(5,3)= $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$]

U42 [K'(5, 3) = 21]

Pascalův trojúhelník, kombinační čísla a jejich vlastnosti

<u>U43</u> [$\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$]

1 8 28 56 70 56 28 8 1

<u>U44</u> [1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1]

<u>U45</u> [a) $\binom{11}{5}$, b) $\binom{14}{3}$, c) $\binom{8}{5}$]

<u>U47</u> [a) {1, 2, 3}, b) {2, 3, 4, 5}, c) $\{y \in N;\ y \geq 2\}$]

<u>U48</u> [2^{18} = 262 144]

<u>U49</u> [$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\binom{n-1}{3}\dots\binom{n-1}{n-3}\binom{n-1}{n-2}\binom{n-1}{n-1}$.

Skládá se tedy z n kombinačních čísel $\binom{n-1}{k}$, kde k nabývá postupně hodnoty 0, 1, …, n-1.]

<u>U50</u> [Dvanáctý řádek se skládá ze dvanácti čísel, vypsaných je prvních šest z nich.
Hodnoty v Pascalově trojúhelníku jsou symetrické podle jeho osy souměrnosti, stačí tedy dopsat řádek v opačném pořadí. Celý dvanáctý řádek Pascalova trojúhelníku pak vypadá takto:
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1]

Souhrnné úlohy

U51 [15]

U52 [42]

U53 [36]

U54 [7]

U55 [6]

U56 [280]

U57 [45]

U58 [12]

U59 [14]

U60 [182]

U61 [36]

U62 [720]

U63 [a) 28; b) 13]

U64 [511]

U65 [6]

U66 [a) 4; b) 21; c) 987]

U67 [7]

U68 [a) 69; b) 64]

U69 [a) 118; b) 113]

U70 [20]

U71 [316]

U72 [5040]

U73 [a) P'(3,2) = 10**,** b) P'(3,2) + P'(2,3) + P'(1,4) + P'(5) = 10 + 10 + 5 + 1 = 26**,** c) P'(3,2) + P'(4,1) + P'(5) = 10 + 5 + 1 = 16]

U74 [a) 32; b) 2^8; c) 2^{12}; obecně 2^n]

U75 [Přihrádkový systém – mezi deset korun vkládáme tři přihrádky: $K'(7,3) = 36$]

U76 [21]

U77 [$24! / (4!)^6$]

U78 [$P'_5(1,1,3)=20$]

U79 [V(3,9)/3!=84]

U80 [K'(3,3) − 1 = 9]

U81 [a) 40 320; b) 70]

U82 [43 200]

U83 [720**;** 360**;** 96**;** 480]

U84 [$\binom{15}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot 4! = 16\,216\,200$]

U85 [a) 24; b) 2; c) 6]

U86 [$\binom{32}{2} \times \binom{32}{3} \times 5!$]

U87 [9!/4! =15 120]

U88 [a) $\binom{3n}{3} - 3 \cdot \binom{n}{3}$, b) n^3]

U89 [a) $\binom{n}{4} - \binom{p}{4}$, b) $\binom{n}{3} - \binom{p}{3} + 1$]

U90 [22]

U91 [$\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=560$]
U92 [K'(7,3) · K'(5,3) = 756]
U93 [7 možností]
U94 [56]
U95 [16]
U96 [{2, 3, … 9}]
U97 [V'(p,n) = n^p]
U98 [135]
U99 [K'(3,3) = 10]
U100 [K'(3,6) = 56]
U101 [$P'(1,1,2,2,2,8)=\frac{16!}{1!1!2!2!2!8!}=\frac{16!}{8\cdot 8!}=64\,864\,800$]
U102 [56]
U103 [120]
U104 [560]
U105 [66]
U106 [523]
U107 [48, 6, 48, 36, 96, 24, 72, 80]
U108 [60, 4, 48, 18, 72, 24, 78, 64]
U109 [62]
U110 [40]
U111 [720; 240; 240; 96]
U112 [11]
U113 [3150; 8106]
U114 [231]
U115 [(n-1)!]
U116 [36; 216]
U117 [$K_2(m).K_2(n)$]
U118 [Počet přímek, které spojují 2 libovolné vrcholy konvexního n-úhelníka je $K_2(n)$.
Abychom zjistili počet úhlopříček, odčítáme od tohoto počtu počet stran n-úhelníka.

$$K(2,n)-n=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$]

U119 [10]
U120 [60; 20]
U121 [1728]
U122 [231]
U123 [66]
U124 [Můžeme si představit, že každý z chlapců je charakterizován nějakou svou přihrádkou, např. pytlíkem na kuličky nebo kapsou. Pak se jedná o rozdělení 50 předmětů do čtyř přihrádek.
Výsledek: $K'(4,50)=\binom{53}{3}=23\,456$; $K'(4,46)=18\,424$]
U125 [125]
U126 [5]
U127 [54]
U128 [K'(3,10) = 220; krychlí je 10]
U129 [P'(6,6,4) = 1 681 680]
U130 [K'(8,3) = 45]
U131 [10]