METODY ŘEŠENÍ ÚLOH – MX2M

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D., jana.prihonska@tul.cz, linka 2370

Rozdělení úloh

- Podle obsahu, zadání, požadavku
- Podle využité řešitelské strategie
- Podle poznávacích procesů
- Podle procesů a dynamiky postupů řešení úloh

Dělení podle obsahu, zadání, požadavku

- Aritmetické
- Algebraické
- Slovní
  - s matematickým obsahem
  - s nematematickým obsahem
- Konstruktivní
- Důkazové
- Kombinatorické
- Množiny bodů dné vlastnosti
- Logické
- Smíšené
- Experimentální

Dělení podle použité řešitelské startegie

- Úlohy řešené výpočtem – aritmetické, početní
- Úlohy řešené rýsováním – konstruktivní, konstrukční
- Úlohy řešené obrázkem

Dělení podle poznávacích procesů

Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike)*. Essox, Prešov 2000.

- Konvergentní
- Divergentní

Konvergentní myšlenkové procesy jsou takové, kde z daných předpokladů myšlení směřujeme k jedinému správnému závěru. Uplatňují se algoritmické přístupy.

Divergentní myšlenkové procesy jsou takové, při nichž je myšlení zaměřené do šířky – produkuje rozličné nápady, alternativy, hypotézy. Často dochází ke ztotožnění s tvořivým myšlením.

Dělení podle procesů a dynamiky postupů řešení úloh

- Algoritmické
- Poloalgoritmické
- Poloheuristické
- Heuristické

Algoritmické úlohy řešíme za bezprostředního využití definic, vzorce, matematické věty a na základě již známých algoritmů. Algoritmus umožňuje řešení jednoduchých rutinních úloh, ale i elementárních problémů ve složených úlohách.
Algoritmy nesnižují tvořivý přístup k yučování, protože nutí žáka k objevování nových algoritmů.

Poloalgoritmické úlohy – postup řešení má jisté zevčeobecňující přístupy, k vyřešení elementárních jevů je potřebný algoritmus. Vztahy mezinimi objevují žáci.

Heuristické úlohy – k vyřešení je potřeba objevit skryté vazby mezipodmínkami úlohy, mezi danými a hledanými, mezi známými a neznámými prvky. Tyto vazby nejsou algoritmickými ani zevšeobecněním žákovi známého pravidla.

G. Polya – cílem heuristiky je zkoumání pravidel a metod, vedoucích k objevům a vynáleům. Žák má být veden k osvojení si metody řešení.

Základní komponenty matematické úlohy

Podle Frobishera a Kopky musíme při vysvětlení pojmu problém rozlišovat jeho tři možné složky:

1. ***Počáteční situace***, *v níž popisujeme vztahy a zadáváme informace a údaje.*
2. ***Cíl****, kterého má řešitel dosáhnout.*
3. ***Cesta*** *z počátečního stavu směrem k cíli. Cesta může či nemusí být známa.*

Klasifikace problémů

Vymezení pojmu problém umožňuje rozdělit jej do několika kategorií.

1. ***CVIČENÍ*** *či* ***RUTINNÍ PROBLÉMY****, jestliže:*
   - *Počáteční situace je uzavřená (výchozí situace je přesně popsána).*
   - *Cíl je přesně dán (je uzavřen).*
   - *Cesta je známa.*
2. ***ÚLOHY*** *či* ***NERUTINNÍ PROBLÉMY****, jestliže:*
   - *Výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená).*
   - *Cíl je přesně dán (je uzavřen).*
   - *Cesta k dosažení cíle je neznámá.*
3. ***ZKOUMÁNÍ****, jestliže:*
   - *Výchozí situace je přesně popsána.*
   - *Cíl není přesně zadán nebo není zadán vůbec (cíl je otevřen).*
   - *Cesta k cíli není známa.*

Samostatnou skupinu tzv. nerutinních problémů tvoří **slovní úlohy**, *které by měly být soustavně využívány zejména v počáteční stadiu výuky matematice k dosažení základních představ o matematických operacích. Pomáhají rozvíjet formální matematické pojmy a dovednosti.*

- **Způsob zadání úlohy** – otevřenost nebo uzavřenost samotného problému
- **Způsob řešení problému** –konvergentnost (uzavřenost, rutinnost) či divergentnost (otevřenost) procesu řešení
- **Výsledek úlohy** – otevřenost a uzavřenost produktu činnosti

Označení: **RP** – uzavřené, rutinní procesy

OP – otevřené procesy

Kombinace uvedených komponent vede k taxonomii tvořivých úloh (Cirjak, 2000):

Tvořivost nejnižšího stupně (Kopka1)

RP – RP – RP

Relativně uzavřené a rutinní postupy, algoritmicky dané, směřující k jedinému správnému výsledku.

I. Tvořivost druhého stupně

RP – RP – OP

RP – OP – RP (Kopka 2)

OP – RP - RP

Jedna z klíčových oblastí je otevřená pro divergentní produkce, zbývající předpokládají aplikace známých reprodukcí.

II. Tvořivost třetího stupně

RP – OP – OP (Kopka 3)

OP – RP – OP

OP – OP - RP

Jenom jedna z komponent úlohy je relativně uzavřená pro použití nestandardních, nealgoritmických, nerutinních procesů, dvě jsou otevřené pro možnost divergentního myšlení a variabilních postupů.

III. Tvořivost nejvyššího stupně

OP – OP – OP

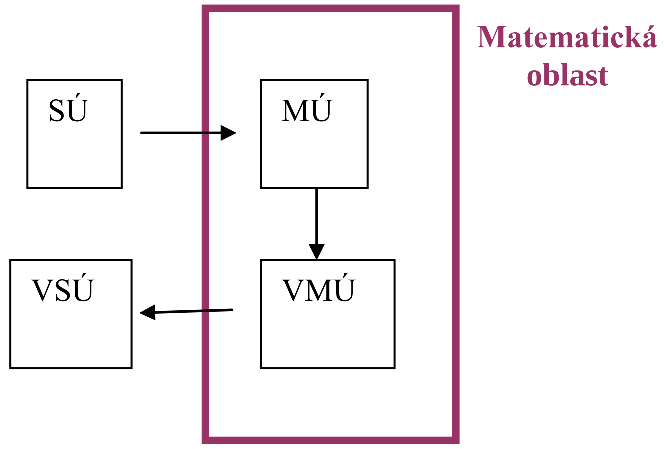
Relativní otevřenost při definování problémů, variabilita při použití procesů řešení i otevřenost na straně výsledků.

MATEMATIZACE SLOVNÍ ÚLOHY

- Vytvoření matematické úlohy
  - Symboly
  - Početní operace
  - Logika – vytváření vztahů, rovnic

- **Proces matematizace končí v okamžiku vytvoření matematické úlohy**

- **Zásada dvojí zkoušky –** na matematickou správnost (vyřešení rovnice) a na text úlohy (reálná správnost)



ŘEŠITELSKÉ STRATEGIE

Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Acta Universitatis Purkynianae, Ústí nad Labem 1999.

Heuristika – metoda objevu

Heuristické strategie

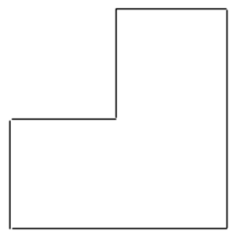
- Přeformulování
- Analogie
- Zobecnění
- Specializace
- Cesta nazpět (řešení odzadu)
- Systematické experimentování, hledání vzorce
- Znázornění, konkretizace
- Zavedení pomocných prvků
- Opakování určitého postupu

UKÁZKY ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ

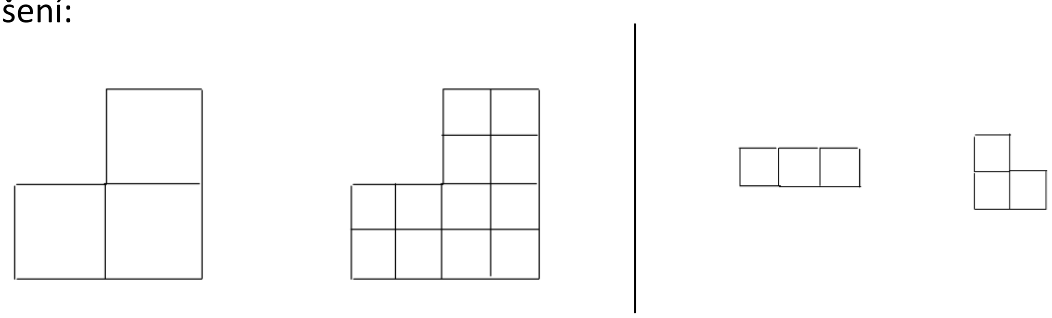
Přeformulování problému

U1

Na obrázku vidíme ¾ čtverce. Rozdělte tento obrazec na čtyři shodné obrazce.



Řešení:



U1a

Kolika způsoby můžeme kombinovat tři miničtverečky, abychom dostali díly, z nichž lze sestavit daný obrazec

Analogie

U2

Marie ujela 425 km a spotřebovala přitom 29,5 l benzínu. Jakou mělo její auto spotřebu na 100 km?

Řešení:

a) užití algoritmu – vztahy
b) neznáme algoritmus → **U2a**

U2a

Marie ujela 200 km a spotřebovala přitom 16 l benzínu. Jakou mělo její auto průměrnou spotřebu na 100 km?

200 km …………… 16 litrů	→	425 km …………… 29,5 litrů
100 km …………… 16 : 2	→	100 km …………… 29,5 : 4,25

Zobecnění

U3

Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel x, y, které splňují rovnici

21*x* – 15*y* = 3

Řešení:

Postupné dosazování za *x*: 1, 2, 3, 4, …, 8 [3,4], [8, 11]

9, 10, ……… [13, 18]

Zobecnění: [*x*, *y*] = [3 + 5*t*; 4 + 7*t*]; $t \in$ N

$$21x - 15y = 3$$

Krátíme $$7x - 5y = 17$$

$$7x = 5y + 1$$

$$x = \frac{5y+1}{7} = \frac{5\cdot(7t+4)+1}{7} = \frac{35t+21}{7} = 5t+3$$

Dosadíme $$7(5t+3) - 5y = 1 \Rightarrow y = 4 + 7t$$

Zkouška dosazením

Specializace

U4

Kolik existuje permutací na *n* prvcích?

U4a

- **Kolik existuje permutací ze tří prvků?**
- **Kolik existuje možných pořadí tří různých prvků ∇, ⊗, ♦?**

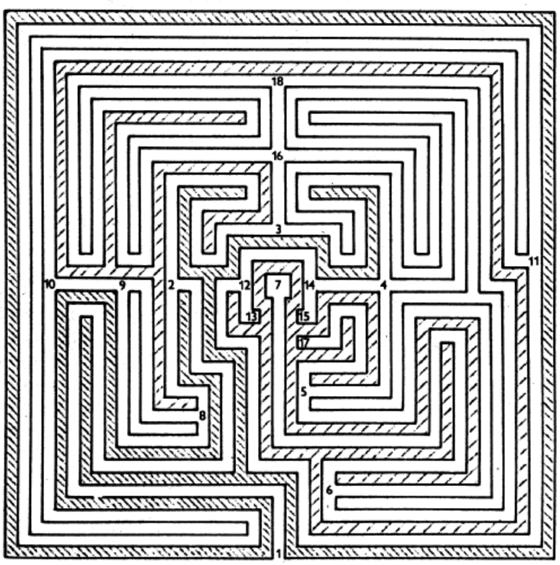
Řešení:

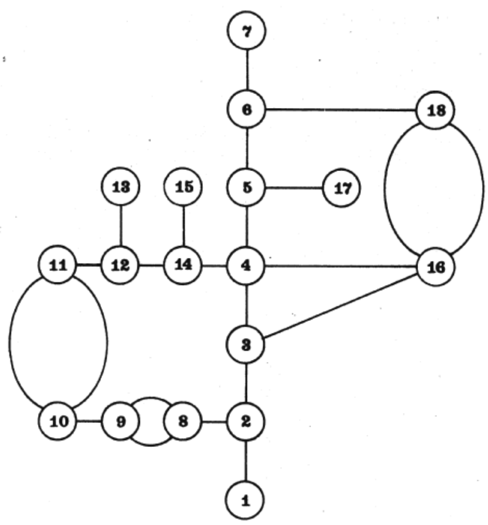
$3! = 6$ .... $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $\rightarrow$ zobecníme $n! = n \cdot (n - 1)$

Cesta zpět

U6

Najděte cestu do středu bludiště





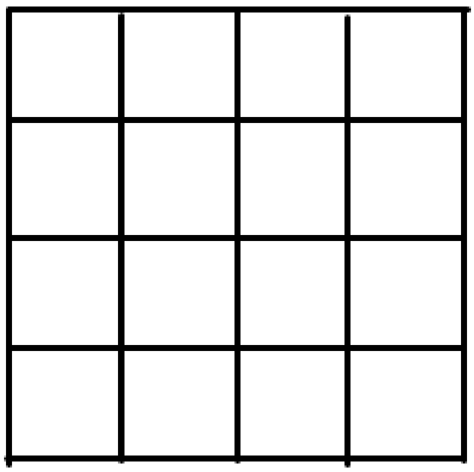
Systematické experimentování, hledání vzorce

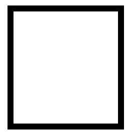
U7

Zjistěte, kolik čtverců je ve čtvercové síti *n* x *n*?

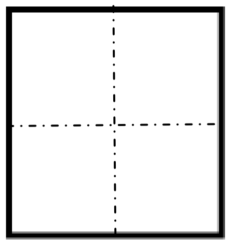
Řešení:

Nejprve vezmeme síť 4 x 4



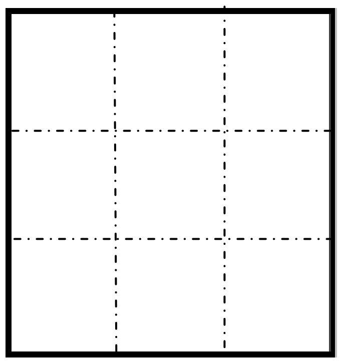


$4 \times 4 = 4^2 = 16$



$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$1 = 1^2$



$2 \times 2 = 2^2 = 4$

Celkem: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

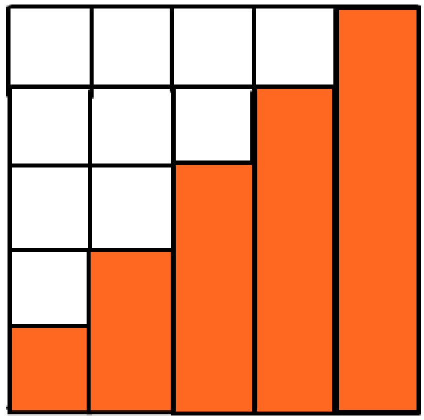
Pro $n = 5$ vytvoříme síť 5 x 5 a přidáme k předchozímu počtu ještě $5^2 = 25$; tj. celkem 55 možností.

Zobecníme pro *n* x *n* : $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$ ….. hypotéza, nutno dokázat

Ilustrace, užití grafického znázornění, konkretizace

U8

Určete vzorec pro součet prvních n přirozených čísel



Řešení:

Znázorníme pomocí sloupcového diagramu.

Volíme n = 5.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = S_5$

Z doplněného čtverce snadno zjistíme

$S_4 + S_5 = 5^2$

Na základě definice součtu $S_5 = S_4 + 5$, tedy $S_4 = S_5 - 5$

Dosadíme za S_4 ……… $S_5 + S_5 - 5 = 5^2$

$$S_5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2}$$

Obecně $$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$ … užili jsme obecnění a analogii

Matematický klokan

http://matematickyklokan.net/info.php

http://matematickyklokan.net/sborniky.php

- Mezinárodní soutěž
- Vznikla v Austrálii 1980
- 1991 – rozšíření do Evropy
- 5. kategorií
    - **Klokánek** – 4.,5. třída ZŠ
    - **Benjamín** – 6., 7. třída ZŠ
    - **Kadet** – 8., 9. třída ZŠ
    - **Junior** – 1., 2. ročník SŠ
    - **Student** – 3., 4. ročník SŠ

- Ve všech kategoriích se řeší 24 testových úloh, vybírá se jedna z pěti nabízených možností
- Hodnocení 3, 4, 5 bodů za správnou odpověď, za špatnou se jeden bod strhává; začíná se na 24 bodech, maximální bodový zisk 120 bodů
- Čas k vypracování - 60 minut pro ZŠ, resp. 75 minut pro SŠ