Matematika.

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

1. 10. 2012

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka
Aritmetické operace s vektory definujeme jako u matic.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka

Aritmetické operace s vektory definujeme jako u matic.

Definice

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka
Aritmetické operace s vektory definujeme jako u matic.

Definice
Říkáme, že vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_r$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1,n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n,1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka
Aritmetické operace s vektory definujeme jako u matic.

Definice
Říkáme, že vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_r$$

lze-li jej vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r \ ,$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice
Matici typu $(1, n)$ nazveme řádkovým vektorem a matici typu $(n, 1)$ sloupcovým vektorem.

Poznámka
Aritmetické operace s vektory definujeme jako u matic.

Definice
Říkáme, že vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_r$$

lze-li jej vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r\ ,$$

kde $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$ jsou vhodná čísla.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1, 0, 2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3, 2, 0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5, -1, 3) \\ \boldsymbol{b} &= (7, 4, 2) \end{aligned}$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3\ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé,

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3\ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Příklad

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Příklad

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (2,5,1) \\ \boldsymbol{b} &= (4,10,2) \end{aligned}$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,2) \\ \boldsymbol{a}_2 &= (3,2,0) \\ \boldsymbol{a}_3 &= (5,-1,3) \\ \boldsymbol{b} &= (7,4,2) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 \ ,$$

tj. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Definice

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé, lze-li alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ lineárně nezávislé.

Příklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (2,5,1) \\ \boldsymbol{b} &= (4,10,2) \end{aligned}$$

jsou lineárně závislé.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta (charakterizace lineární závislosti)

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta (charakterizace lineární závislosti)
Vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta (charakterizace lineární závislosti)
Vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když lze najít kaková čísla $k_1, k_2, \ldots, k_p$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly,

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Věta (charakterizace lineární závislosti)
Vektory $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_p$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když lze najít kaková čísla $k_1, k_2, \dots, k_p$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly, že platí

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{a}_p = 0\ .$$

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice

Vektorový prostor

Definice
Vektor $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulový vektor.

Vektorový prostor

Definice
Vektor $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulový vektor.
Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nenulový vektor,

Vektorový prostor

Definice

Vektor $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulový vektor.
Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nenulový vektor, potom vektor $\boldsymbol{-a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ nazveme opačným vektorem k vektoru $\boldsymbol{a}$.

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$)

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$). Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$). Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:

1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)

2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1 k_2)\boldsymbol{u}$

Vektorový prostor

Definice
Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\mathbf{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1 k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\boldsymbol{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\mathbf{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$.

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$). Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:

1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1 k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\boldsymbol{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$. Pak V nazýváme vektorovým prostorem nad R.

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\boldsymbol{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$. Pak V nazýváme vektorovým prostorem nad R.
Prvky vektorového prostoru se nazývají vektory.

Vektorový prostor

Definice

Neprázdnou množinu prvků V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) a násobení prvku z V číslem (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $k \in R$ je jednoznačně přiřazen prvek $k\boldsymbol{u} \in V$).
Uvedené operace musí přitom splňovat podmínky:
1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativní zákon)
2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (asociativní zákon)
3) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (distributivní zákon)
4) $(k_1 + k_2)\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{u}$ (distributivní zákon)
5) $k_1(k_2\boldsymbol{u}) = (k_1k_2)\boldsymbol{u}$
6) existuje prvek $\boldsymbol{0} \in V$ takový, že $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
7) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$. Pak V nazýváme vektorovým prostorem nad R.
Prvky vektorového prostoru se nazývají vektory. Vektor se nazývá nulový vektor.

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Příklady

Vektorový prostor

Příklady

1) Množina všech n-rozměrných aritmetických vektorů je vektorovým prostorem.

Vektorový prostor

Příklady

1) Množina všech n-rozměrných aritmetických vektorů je vektorovým prostorem.
2) Množina všech polynomů s reálnými koeficienty spolu s obvyklými operacemi sčítání a násobení reálným číslem je vektorový prostor.

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V, jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V, jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_q$ jsou vhodná čísla.

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V, jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_q$ jsou vhodná čísla.

Příklad

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V, jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_q$ jsou vhodná čísla.

Příklad
R^4

Vektorový prostor

Definice
Řekneme, že množina vektorů

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_q$$

generuje vektorový prostor V, jestliže je možné vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{a}_i$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_q$ jsou vhodná čísla.

Příklad
R^4
$(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0)$ negenerují R^4.

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V,

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá

Vektorový prostor

Definice

Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Vektorový prostor

Definice

Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad
R^4

Vektorový prostor

Definice

Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad

R^4

$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0), (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ je báze R^4.

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad
R^4
$(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)$ je báze R^4.

Definice

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad
R^4
$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0), (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ je báze R^4.

Definice
Buď $V \neq \mathbf{0}$ vektorový prostor.

Vektorový prostor

Definice

Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad

R^4

$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),(0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ je báze R^4.

Definice

Buď $V \neq \mathbf{0}$ vektorový prostor. Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze.

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad
R^4
$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0), (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ je báze R^4.

Definice
Buď $V \neq \mathbf{0}$ vektorový prostor. Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze.
Triviální vektorový prostor $V = \mathbf{0}$ má dimenzi 0.

Vektorový prostor

Definice
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá báze V, jestliže je lineárně nezávislá a generuje V.

Příklad
R^4
$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0), (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ je báze R^4.

Definice
Buď $V \neq \mathbf{0}$ vektorový prostor. Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze.
Triviální vektorový prostor $V = \mathbf{0}$ má dimenzi 0.
Značíme: dim$V =$ číslo.