Matematika.

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

8. 10. 2012

Determinant

Determinant

Definice. (Determinant matice)

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je det$\mathbf{A} = a_{11}$

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je det$\mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je det$\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je
$\det \mathbf{A} = a_{11}\det \mathbf{A}_{11} - a_{12}\det \mathbf{A}_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det \mathbf{A}_{1n}$,

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je $\det\mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je
$\det\mathbf{A} = a_{11}\det\mathbf{A}_{11} - a_{12}\det\mathbf{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det\mathbf{A}_{1n}$,
kde $\mathbf{A}_{1k}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí matici $(n-1)$-ho řádu,

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je det$\mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je det$\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je
det$\mathbf{A} = a_{11}$det$\mathbf{A}_{11} - a_{12}$det$\mathbf{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}det\mathbf{A}_{1n}$,
kde $\mathbf{A}_{1k}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí matici $(n-1)$-ho řádu, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ (n-tého řádu)

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je det$\mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je det$\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je
det$\mathbf{A} = a_{11}$det$\mathbf{A}_{11} - a_{12}$det$\mathbf{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}det\mathbf{A}_{1n}$,
kde $\mathbf{A}_{1k}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí matici $(n-1)$-ho řádu, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ (n-tého řádu) vynecháním prvního řádku a k-tého sloupce.

Determinant

Determinant

Příklad

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Determinant

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$.

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{j+1}a_{j1}\det\mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det\mathbf{A}_{j2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{j+n}a_{jn}\det\mathbf{A}_{jn} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{j+1}a_{j1}\det\mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det\mathbf{A}_{j2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{j+n}a_{jn}\det\mathbf{A}_{jn} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obdobně, pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{j+1}a_{j1}\det\mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det\mathbf{A}_{j2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{j+n}a_{jn}\det\mathbf{A}_{jn} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obdobně, pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{k+1}a_{1k}\det\mathbf{A}_{1k} + (-1)^{k+2}a_{2k}\det\mathbf{A}_{2k} + \cdots +$$

$$+(-1)^{k+n}a_{nk}\det\mathbf{A}_{nk} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{j+1}a_{j1}\det\mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det\mathbf{A}_{j2} + \cdots +$$
$$+(-1)^{j+n}a_{jn}\det\mathbf{A}_{jn} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obdobně, pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{k+1}a_{1k}\det\mathbf{A}_{1k} + (-1)^{k+2}a_{2k}\det\mathbf{A}_{2k} + \cdots +$$
$$+(-1)^{k+n}a_{nk}\det\mathbf{A}_{nk} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Přitom matice $\mathbf{A}_{jk}$ tvoříme obdobným způsobem jako v definici.

Determinant

Determinant

Příklad

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Věta.

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Věta.
Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Sarrusovo pravidlo

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} = \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = $$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \end{array} =$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} = \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Poznámka.

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} = \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Poznámka.
Sarrusovo pravidlo platí pouze pro determinanty 3-tího stupně.

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Poznámka.
Sarrusovo pravidlo platí pouze pro determinanty 3-tího stupně. Determinanty vyšších stupňů se počítají jinak.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo

Věta.

Cramerovo pravidlo

Věta.
Nechť $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic,

Cramerovo pravidlo

Věta.
Nechť $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic, nechť $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Cramerovo pravidlo

Věta.
Nechť $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic, nechť det$\boldsymbol{A} \neq 0$. Pak má soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kde

Cramerovo pravidlo

Věta.
Nechť $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic, nechť $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Pak má soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, kde

$$k_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}} \qquad i = 1, 2, \dots, n \;.$$

Cramerovo pravidlo

Věta.
Nechť $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic, nechť det$\boldsymbol{A} \neq 0$. Pak má soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kde

$$k_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

($\boldsymbol{A}_i$ je matice, která vznikne z matice soustavy tak, že její i-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran $\boldsymbol{b}$)