Matematika

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

12. 11. 2012

Definice **Okolí bodu**

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu

Předpokládáme, že $a \in R$, $\delta \in (0, \infty)$.

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0,\infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x-a| < \delta\} = (a-\delta,\ a+\delta)\ .$$

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x-a| < \delta\} = (a-\delta,\ a+\delta)\ .$$

Poznámka

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x - a| < \delta\} = (a - \delta,\ a + \delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x - a| < \delta\} = (a - \delta,\ a + \delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Definice

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu** a s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x - a| < \delta\} = (a - \delta,\ a + \delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Definice
Je-li $a \in R,\ M \subset R$ a existuje-li okolí bodu a, které je podmnožinou množiny M řekneme, že a je **vnitřní bod** množiny M.

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x-a| < \delta\} = (a-\delta,\ a+\delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Definice
Je-li $a \in R,\ M \subset R$ a existuje-li okolí bodu a, které je podmnožinou množiny M řekneme, že a je **vnitřní bod** množiny M.

Definice

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu a** s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x - a| < \delta\} = (a - \delta,\ a + \delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Definice
Je-li $a \in R,\ M \subset R$ a existuje-li okolí bodu a, které je podmnožinou množiny M řekneme, že a je **vnitřní bod** množiny M.

Definice
Je-li $a \in R,\ M \subset R$ a obsahuje-li každé okolí bodu a nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do množiny M, řekneme, že a je **hraniční bod** množiny M.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b,

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$,

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo,

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a,

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a, avšak různé od a.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a, avšak různé od a.
Funkce ovšem nemusí mít limitu v každém bodě.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a, avšak různé od a.
Funkce ovšem nemusí mít limitu v každém bodě.

Věta 3.1 (o jednoznačnosti limity)

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a, avšak různé od a.
Funkce ovšem nemusí mít limitu v každém bodě.

Věta 3.1 (o jednoznačnosti limity)
Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$,

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$,

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)
Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to b} f(x) = c$,

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)
Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to b} f(x) = c$, je-li $h = f(g)$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)
Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to b} f(x) = c$, je-li $h = f(g)$ a je-li pro každé $x \in D(g), x \neq a$, slpněna nerovnost $g(x) \neq b$,

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)
Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to b} f(x) = c$, je-li $h = f(g)$ a je-li pro každé $x \in D(g), x \neq a$, slpněna nerovnost $g(x) \neq b$, pak
$$\lim_{x\to a} h(x) = c \ .$$

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)
Je-li f elementární funkce

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)
Je-li f elementární funkce a je-li a vnitřní bod $D(f)$,

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)
Je-li f elementární funkce a je-li a vnitřní bod $D(f)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ .$$

Definice

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.

Definice
Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$.

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu $-\infty$**,

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞),

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$,

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.

Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s,

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**,**

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$, **(resp.** ∞**)**,

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$,

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞),

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové,

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$,

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.
Píšeme: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$,

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$**, (resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.
Píšeme: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$).

Poznámka

Limita a spojitost funkcí

Poznámka

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$,

Poznámka

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Limita a spojitost funkcí

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka

Limita a spojitost funkcí

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit,

Limita a spojitost funkcí

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Limita a spojitost funkcí

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Věta 3.6

Limita a spojitost funkcí

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Věta 3.6
A) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) > 0$,

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Věta 3.6
A) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) > 0$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0\ .$$

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Věta 3.6
A) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) > 0$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \ .$$

B) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) < 0$,

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Věta 3.6
A) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) > 0$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \ .$$

B) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) < 0$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \ .$$

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b,

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b),

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b**)**, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové,

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$,

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$)

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x\to a} f(x) = b$,

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x\to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$.

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x \to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x \to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)
Platí implikace :

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x \to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)
Platí implikace :
Je-li $\lim_{x \to a^+} f(x) = b,\ \lim_{x \to a^-} f(x) = c$ a $b \neq c$,

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x\to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)
Platí implikace :
Je-li $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = c$ a $b \neq c$, potom $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Definice

Limita a spojitost funkcí

Definice

Definujeme nové symboly

Limita a spojitost funkcí

Definice

Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x \to 0^-} x \ .$$

Limita a spojitost funkcí

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x \to 0^-} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^+, resp. 0^-)

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x \to 0^-} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^+, resp. 0^-)
$\frac{1}{0^+} = +\infty$

Limita a spojitost funkcí

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x\to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x\to 0^-} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^+, resp. 0^-)
$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$

Limita a spojitost funkcí

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x \to 0^-} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^+, resp. 0^-)
$\frac{1}{0^+} = +\infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

Poznámka

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^{+} = \lim_{x \to 0^{+}} x \ ,$$

$$0^{-} = \lim_{x \to 0^{-}} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^{+}, resp. 0^{-})
$\frac{1}{0^{+}} = +\infty \quad \frac{1}{0^{-}} = -\infty.$

Poznámka
Analogicky se definují i nevlastní jednostranné limity.

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ .$$

Poznámka

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Poznámka
Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ .$$

Poznámka
Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Příklad

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Poznámka
Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Příklad
Polynom a funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém $a \in R$.

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Poznámka
Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Příklad
Polynom a funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém $a \in R$.
Racionální funkce je spojitá v každém bodě $a \in R$, v němž je definována.

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a,

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$,

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$,

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.
Je-li navíc $g(a) \neq 0$,

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.
Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.
Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.
Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)
Je-li funkce g spojitá v bodě a

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg.
Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)
Je-li funkce g spojitá v bodě a a je-li funkce h spojitá v bodě $g(a)$,

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)
Je-li funkce g spojitá v bodě a a je-li funkce h spojitá v bodě $g(a)$, pak je složená funkce $f = h(g)$ spojitá v bodě a.

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)\ .$$

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \; .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a, jestliže

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\ .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ .$$

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\ .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ .$$

Poznámka

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\ .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ .$$

Poznámka
Platí analogické věty větám 4.1 a 4.2.

Spojitost na intervalu

Definice

Spojitost na intervalu

Definice
Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I,

Spojitost na intervalu

Definice
Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě,

Spojitost na intervalu

Definice
Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I, pokud je zleva uzavřený,

Spojitost na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I, pokud je zleva uzavřený, a jestliže je spojitá zleva v pravém hraničním bodě intervalu I, pokud je zprava uzavřený.

Spojitost na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I, pokud je zleva uzavřený, a jestliže je spojitá zleva v pravém hraničním bodě intervalu I, pokud je zprava uzavřený.

Věta 4.3

Spojitost na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I, pokud je zleva uzavřený, a jestliže je spojitá zleva v pravém hraničním bodě intervalu I, pokud je zprava uzavřený.

Věta 4.3

Elementární funkce f je spojitá na každém intervalu $I \subset D(f)$.

Věta 4.4 (Weierstrassova)

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I,

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla c, $d \in I$

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla c, $d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla $c, d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ .$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla c, $d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ .$$

Poznámka

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla c, $d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)\ .$$

Poznámka
Věta říká,

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla $c, d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ .$$

Poznámka
Věta říká, že spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá v nějakém bodě své nejmenší funkční hodnoty

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla $c, d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \ .$$

Poznámka
Věta říká, že spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá v nějakém bodě své nejmenší funkční hodnoty a v některém bodě své největší funkční hodnoty.

Věta 4.5 (Bolzánova)

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$,

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$,

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q \ .$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q \ .$$

Poznámka

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q\ .$$

Poznámka
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q\ .$$

Poznámka
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.
Zvláštní případ pro $q = 0$

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q \ .$$

Poznámka
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.
Zvláštní případ pro $q = 0$
existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q \ .$$

Poznámka
Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.
Zvláštní případ pro $q = 0$
existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.
(metoda půlení intervalu)