Matematika

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

10. 12. 2012

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo,

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství,

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

$$S \doteq 0,25.f(0) + 0,25.f(0,25) + 0,25.f(0,5) + 0,25.f(0,75) = 0,55208$$

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

$$S \doteq 0,25.f(0) + 0,25.f(0,25) + 0,25.f(0,5) + 0,25.f(0,75) = 0,55208$$

Počet částí	Součet	Počet částí	Součet
4	$0,552\,080$	128	$0,662\,669$
8	$0,606\,766$	256	$0,664\,429$
16	$0,636\,056$	512	$0,665\,176$
32	$0,651\,175$	1024	$0,665\,218$
64	$0,658\,848$	2048	$0,666\,228$

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

$$S \doteq 0,25.f(0) + 0,25.f(0,25) + 0,25.f(0,5) + 0,25.f(0,75) = 0,55208$$

Počet částí	Součet	Počet částí	Součet
4	0, 552 080	128	0, 662 669
8	0, 606 766	256	0, 664 429
16	0, 636 056	512	0, 665 176
32	0, 651 175	1024	0, 665 218
64	0, 658 848	2048	0, 666 228

Takto vyjádříme čísla (součty), která přibližně vyjadřují číslo S.

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

$$S \doteq 0,25.f(0) + 0,25.f(0,25) + 0,25.f(0,5) + 0,25.f(0,75) = 0,55208$$

Počet částí	Součet	Počet částí	Součet
4	$0,552\,080$	128	$0,662\,669$
8	$0,606\,766$	256	$0,664\,429$
16	$0,636\,056$	512	$0,665\,176$
32	$0,651\,175$	1024	$0,665\,218$
64	$0,658\,848$	2048	$0,666\,228$

Takto vyjádříme čísla (součty), která přibližně vyjadřují číslo S.
Přitom platí, že číslo S může být vyjádřeno uvedeným postupem s libovolnou přesností.

Poznámka
Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu.

Určitý integrál

Poznámka
Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu. (v příkladě jsme volili levý krajní bod)

Určitý integrál

Poznámka
Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu. (v příkladě jsme volili levý krajní bod)

Hledané číslo S je určeno funkcí $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}$ a intervalem $[0, 1]$,

Určitý integrál

Poznámka
Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu. (v příkladě jsme volili levý krajní bod)

Hledané číslo S je určeno funkcí $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}$ a intervalem $[0, 1]$, zapisujeme ho

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})\, dx$$

Určitý integrál

Poznámka

Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu. (v příkladě jsme volili levý krajní bod)

Hledané číslo S je určeno funkcí $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}$ a intervalem $[0, 1]$, zapisujeme ho

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})\, dx$$

a čteme „určitý integrál funkce $x^2 + \frac{1}{3}$ na intervalu $[0, 1]$“.

Určitý integrál

Definice

Určitý integrál

Definice

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

Určitý integrál

Definice

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Množinu dělících bodů

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a,b]$.
a) Interval $[a,b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \dots,[x_{n-1},x_n]\ ,$$

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Množinu dělících bodů

$$D=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$$

nazveme **dělením** D intervalu $[a,b]$.

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Množinu dělících bodů

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

nazveme **dělením** D intervalu $[a, b]$.
Délku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ označíme Δx_i, tj.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Množinu dělících bodů

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

nazveme **dělením** D intervalu $[a, b]$.
Délku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ označíme Δx_i, tj.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

a nazveme **krokem dělením** D.

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Množinu dělících bodů

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

nazveme **dělením** D intervalu $[a, b]$.
Délku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ označíme Δx_i, tj.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, n$$

a nazveme **krokem dělením** D.
Maximální krok dělení D označíme

$$h(D) = \mathsf{max}_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\ .$$

Určitý integral

b) K dané funkci f a dělení D utvoříme součet

Určitý integral

b) K dané funkci f a dělení D utvoříme součet

$$S(D,f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \ ,$$

kde c_1, c_2, ..., c_n jsou libovolné body, zvolené v jednotlivých částečných intervalech, tj.

Určitý integral

b) K dané funkci f a dělení D utvoříme součet

$$S(D, f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \ ,$$

kde c_1, c_2, ..., c_n jsou libovolné body, zvolené v jednotlivých částečných intervalech, tj.

$$c_1 \in [x_0, x_1],\ c_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots, c_n \in [x_{n-1}, x_n] \ .$$

Určitý integral

b) K dané funkci f a dělení D utvoříme součet

$$S(D,f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \ ,$$

kde c_1, c_2, ..., c_n jsou libovolné body, zvolené v jednotlivých částečných intervalech, tj.

$$c_1 \in [x_0, x_1],\ c_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]\ .$$

Součet $S(D,f)$ nazveme **integrálním součtem funkce** f.

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I,

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností,

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $[a, b]$

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $[a, b]$
a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $[a, b]$
a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Poznámka (přesný význam „aproximovat číslo I integrálním součtem s libovolnou přesností“)
Pro každé přirozené k existuje číslo $H > 0$

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $[a, b]$
a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Poznámka (přesný význam „aproximovat číslo I integrálním součtem s libovolnou přesností“)
Pro každé přirozené k existuje číslo $H > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ s maximálním krokem $h(D) < H$

Určitý integral

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce f na intervalu** $[a, b]$
a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Poznámka (přesný význam „aproximovat číslo I integrálním součtem s libovolnou přesností“)
Pro každé přirozené k existuje číslo $H > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ s maximálním krokem $h(D) < H$ a pro libovolnou volbu $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ platí nerovnost

$$|S(D, f) - I| \leq 0,5.10^{-k} \ .$$

Určitý integrál

Definice

Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál,

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor,

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze,

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka
Výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá integrování funkce f na intervalu $[a, b]$.

Určitý integrál

Definice

Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka

Výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá integrování funkce f na intervalu $[a, b]$. Vstupem této operace je funkce f a integrační meze,

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka
Výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá integrování funkce f na intervalu $[a, b]$. Vstupem této operace je funkce f a integrační meze, výstupem operace je číslo.

Určitý integrál

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čisla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka
Výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá integrování funkce f na intervalu $[a, b]$. Vstupem této operace je funkce f a integrační meze, výstupem operace je číslo.

Příklad
Podle definice určete integrál funkce $f(x) = k$ na intervalu $[a, b]$.

Určitý integrál

Věta 8.1.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$,

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$,

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad
Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad
Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
(není definována v bodě 0,

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad
Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
(není definována v bodě 0, ale je integrovatelná na libovolném intervalu $[a, b]$)

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad

Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.
(řešení, tj. funkci x^2 nazveme primitivní funkcí k funkci $2x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$)

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.
(řešení, tj. funkci x^2 nazveme primitivní funkcí k funkci $2x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$)

Definice
Funkci F nazveme primitivní funkcí k funkci f na intervalu J,

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad

Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.
(řešení, tj. funkci x^2 nazveme primitivní funkcí k funkci $2x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$)

Definice

Funkci F nazveme primitivní funkcí k funkci f na intervalu J, jestliže pro všechna čísla $x \in J$ platí

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí. Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.
(řešení, tj. funkci x^2 nazveme primitivní funkcí k funkci $2x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$)

Definice
Funkci F nazveme primitivní funkcí k funkci f na intervalu J, jestliže pro všechna čísla $x \in J$ platí

$$F' = f\ .$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x$

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathsf{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathsf{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J),

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg}x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$f(x) = 2x \quad F(x) = x^2$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$$
$$x^2 + 1$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$

$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$$
$$x^2 + 1$$
$$x^2 - 2$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$$f(x) = 2x \qquad \begin{aligned} F(x) &= x^2 \\ &x^2 + 1 \\ &x^2 - 2 \end{aligned}$$

Věta 9.1.

Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J,

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Příklad

$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J), pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = \begin{array}{l} x^2 \\ x^2 + 1 \\ x^2 - 2 \end{array}$$

Věta 9.1.
Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J, potom každá primitivní funkce různá od F je ve tvaru $F + c$, kde c je konstanta.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

!!!!! Ne ke každé funkci existuje primitivní funkce !!!

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

!!!!! Ne ke každé funkci existuje primitivní funkce !!!

Věta 9.2.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

!!!!! Ne ke každé funkci existuje primitivní funkce !!!

Věta 9.2.
Je-li funkce f spojitá na intervalu J,

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

!!!!! Ne ke každé funkci existuje primitivní funkce !!!

Věta 9.2.
Je-li funkce f spojitá na intervalu J, potom k ní existuje primitivní funkce F na J.

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$,

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx\ .$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx \ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx \ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du \ .$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx\ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du\ .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx\ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du\ .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$,

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx \ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du \ .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom funkce

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx \ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du \ .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom funkce

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

má derivaci pro každé $x \in [a, b]$ a platí

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\, dx \; .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\, du \; .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom funkce

$$H(x) = \int_a^x f(u)\, du$$

má derivaci pro každé $x \in [a, b]$ a platí

$$H'(x) = f(x) \; .$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x) \ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a, b]$,

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du = 0\ ,$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0\ ,$$

dosaď $x=b$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a, b]$, dosaď $x = a$

$$H(a) = \int_a^a f(u)\, du = 0\ ,$$

dosaď $x = b$

$$H(b) = \int_a^b f(u)\, du\ ,$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a, b]$, dosaď $x = a$

$$H(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0\ ,$$

dosaď $x = b$

$$H(b) = \int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x)=H(x)+c$ dostaneme

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x) \ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a, b]$, dosaď $x = a$

$$H(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0 \ ,$$

dosaď $x = b$

$$H(b) = \int_a^b f(u)\,du \ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = H(b) = H(b) - 0 = H(b) - H(a) \ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x) = H(x) + c$ dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x)=H(x)+c$ dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)-H(a)$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x)=H(x)+c$ dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)-H(a)=G(b)-c-(G(a)-c)$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\ldots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x)=H(x)+c$ dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)-H(a)=G(b)-c-(G(a)-c)=G(b)-G(a)\ .$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu,

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ ,$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ ,$$

někdy píšeme

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b \ .$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ ,$$

někdy píšeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\ .$$

Příklad
$\int_1^2 2x\,dx =$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\ ,$$

někdy píšeme

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b\ .$$

Příklad
$\int_1^2 2x\, dx = [x^2]_1^2 =$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ ,$$

někdy píšeme

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b \ .$$

Příklad
$\int_1^2 2x\, dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.