Matematika

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

17. 12. 2012

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí,

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J,

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J, tj.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J, tj.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Konstantu C nazýváme **integrační konstanta**.

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J, tj.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Konstantu C nazýváme **integrační konstanta**.

Příklad

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J, tj.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Konstantu C nazýváme **integrační konstanta**.

Příklad
$\int 2x\,dx = x^2 + C$

Základní vzorce pro integraci

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \; ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \ ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1\ ,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ ,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \ ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \ ,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \ ,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \ a \neq 1) \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \ ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \ ,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \ ,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \ a \neq 1) \ ,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \ ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \ ,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \ ,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \ a \neq 1) \ ,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \ ,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s \, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1 \ ,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \ ,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \ ,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \ a \neq 1) \ ,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \ ,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \ ,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg} x + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1\ ,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ ,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\ ,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)\ ,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\ ,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathsf{tg}x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathsf{cotg}x + C\ ,$$

Základní vzorce pro integraci

Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsin}x + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathsf{arcsin}x + C \ ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathsf{arctg}x + C \ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathsf{arcsin} x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathsf{arctg} x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathsf{ln}|x+\sqrt{x^2+1}| + C\ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\, x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C\ ,$$

Neurčitý integrál

Poznámka

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.
Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.
Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx \;, \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.
Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx\ , \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\ .$$

Neurčitý integrál

Poznámka

Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.

Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx \;, \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \;.$$

Příklad.

Neurčitý integrál

Poznámka
Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.
Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx \;, \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \;.$$

Příklad.
$\int (2x^3 - \frac{3}{4}x - \sqrt{x})\,dx =$

Poznámka

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.

Neurčitý integrál

Poznámka

a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci,

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.
$\int_a^x \frac{\sin t}{t}\, dt,$

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.
$\int_a^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt,$

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.
$\int_a^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \int_a^x \frac{\cos t}{t}\, dt, \quad \int_a^x e^{t^2}\, dt,$

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.
$\int_a^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \int_a^x \frac{\cos t}{t}\, dt, \quad \int_a^x e^{t^2}\, dt, \quad \int_a^x \sin t^2\, dt,$

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí
$$\int uv'\,dx \;=\; uv \;-\; \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I\ .$$

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí

$$\int uv'\,dx \;=\; uv \;-\; \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I\ .$$

Důkaz :

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí

$$\int uv'\,dx \;=\; uv \;-\; \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I\ .$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci součinu

$$(u.v)' \;=\; u'v \;+\; uv'$$

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I \ .$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci součinu

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

integrujeme

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí

$$\int uv'\,dx \;=\; uv \;-\; \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I\ .$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci součinu

$$(u.v)' \;=\; u'v \;+\; uv'$$

integrujeme

$$u.v \;+\; C \;=\; \int u'v\,dx \;+\; \int uv'\,dx\ .$$

Integrování po částech

Příklady

Integrování po částech

Příklady

$\int xe^x \, dx$

Integrování po částech

Příklady

$\int xe^x \, dx$

$\int \ln x \, dx$

Integrování po částech

Příklady

$\int xe^x \, dx$

$\int \ln x \, dx$

$\int \sin^2 x \, dx$

Integrování po částech

Příklady

$\int xe^x \, dx$

$\int \ln x \, dx$

$\int \sin^2 x \, dx$

Poznámka

Integrování po částech

Příklady

$\int xe^x \, dx$

$\int \ln x \, dx$

$\int \sin^2 x \, dx$

Poznámka

Integrační konstantu neuvádíme, dokud se na pravé straně vyskytuje nějaké znaménko integrálu.

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce definované v $[a, b]$ a jsou tam spojité i se svými derivacemi u', v'.

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce definované v $[a, b]$ a jsou tam spojité i se svými derivacemi u', v'.
Pak platí

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx\,.$$

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce definované v $[a, b]$ a jsou tam spojité i se svými derivacemi u', v'.
Pak platí

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx\,.$$

Příklad

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce definované v $[a, b]$ a jsou tam spojité i se svými derivacemi u', v'.
Pak platí

$$\int_a^b uv'\,dx \;=\; [uv]_a^b \;-\; \int_a^b u'v\,dx\;.$$

Příklad
$\int_0^\pi x \sin x \, dx$

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť
$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť
$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g'

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť
$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$
Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak
$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Důkaz :

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci složené funkce

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci složené funkce

$$(F(g(x))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$$

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\,du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci složené funkce

$$(F(g(x))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$$

a nyní integrujeme

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (1. věta o substituci)
Nechť

$$\int f(u)\, du \;=\; F(u) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } I\,.$$

Nechť g je funkce definovaná v intervalu J, má tam derivaci g' a nechť $g(x) \in I$ pro $x \in J$.
Pak

$$\int f(g(x)).g'(x)\, dx \;=\; F(g(x)) \;+\; C \qquad \text{v intervalu } J.$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci složené funkce

$$(F(g(x))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$$

a nyní integrujeme

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x)).g'(x)\, dx\ .$$

Schéma výpočtu

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx =$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array}\right|$$

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)}$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du = \cdots = F(u) + C$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array}\right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du = \cdots = F(u) + C =$$

$$= \left|\; u = g(x) \;\right|$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du = \cdots = F(u) + C =$$

$$= \left| \; u = g(x) \; \right| = F(g(x)) + C$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array}\right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du = \cdots = F(u) + C =$$

$$= \left|\ u = g(x)\ \right| = F(g(x)) + C$$

Příklad

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ \frac{du}{g'(x)} = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(u).g'(x)\,\frac{du}{g'(x)} = \int f(u)\,du = \cdots = F(u) + C =$$

$$= \left|\ u = g(x)\ \right| = F(g(x)) + C$$

Příklad

$\int \sin^2 x \cos x\,dx$

Substituce v integrálech

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$.

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Nechť funkce g je spojitá v intervalu $[\alpha, \beta]$ a má tam spojitou derivaci g'.

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Nechť funkce g je spojitá v intervalu $[\alpha, \beta]$ a má tam spojitou derivaci g'. Nechť $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Nechť funkce g je spojitá v intervalu $[\alpha, \beta]$ a má tam spojitou derivaci g'. Nechť $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$ a nechť $g(t) \in [a,\ b]$ pro všechna $t \in [\alpha, \beta]$.

Substituce v integrálech

Věta 9.10 (Substituce pro určitý integrál)
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Nechť funkce g je spojitá v intervalu $[\alpha, \beta]$ a má tam spojitou derivaci g'. Nechť $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$ a nechť $g(t) \in [a,\ b]$ pro všechna $t \in [\alpha, \beta]$.
Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)).g'(t)\, dt\ = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \ \ \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \ \ \ldots x = g(\beta) = b \end{array} \right|$$

Schéma výpočtu

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)).g'(t)\,dt = \left|\begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \ \ \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \ \ \ldots x = g(\beta) = b \end{array}\right| =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = \ldots$$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \;\; \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \;\; \ldots x = g(\beta) = b \end{array} \right| =$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \ldots$$

Příklad

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \ \ \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \ \ \ldots x = g(\beta) = b \end{array} \right| =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = \ldots$$

Příklad

$\int_1^e \ln^2 x\,dx =$

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \ \ \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \ \ \ldots x = g(\beta) = b \end{array} \right| =$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \ldots$$

Příklad

$\int_1^e \ln^2 x\,dx =$

Poznámka

Substituce v integrálech

Schéma výpočtu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)).g'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \\ t = \alpha \ \ \ldots x = g(\alpha) = a \\ t = \beta \ \ \ldots x = g(\beta) = b \end{array} \right| =$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \ldots$$

Příklad

$\int_1^e \ln^2 x\,dx =$

Poznámka

Na rozdíl od neurčitého integrálu se k původní proměnné x již nevracíme.