Matematika

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

7. 1. 2013

Způsoby zadání křivky v rovině

Aplikace určitého integrálu

Způsoby zadání křivky v rovině
a) Spojitou funkcí

Aplikace určitého integrálu

Způsoby zadání křivky v rovině
a) Spojitou funkcí

Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

kde f je spojitá funkce.

Způsoby zadání křivky v rovině

a) Spojitou funkcí

Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

kde f je spojitá funkce.
(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Aplikace určitého integrálu

Způsoby zadání křivky v rovině
a) Spojitou funkcí

Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\,, \quad x \in [a,b]\,,$$

kde f je spojitá funkce.
(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Příklad

Způsoby zadání křivky v rovině
a) Spojitou funkcí
Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\ , \quad x \in [a, b]\ ,$$

kde f je spojitá funkce.
(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Příklad

$$\sin x\ ,$$

Způsoby zadání křivky v rovině

a) Spojitou funkcí

Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\ , \quad x \in [a, b]\ ,$$

kde f je spojitá funkce.
(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Příklad

$$\sin x\ ,$$
$$e^x\ .$$

Aplikace určitého integrálu

b) Parametrickými rovnicemi

Aplikace určitého integrálu

b) Parametrickými rovnicemi
Křivka je zadána rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kde $x(t),\ y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

b) Parametrickými rovnicemi
Křivka je zadána rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kde $x(t),\ y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Příklad

b) Parametrickými rovnicemi
Křivka je zadána rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kde $x(t),\ y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Příklad

$$x = 2 + 3t\,,\ y = 1 - t\,,\ t \in R\ \ \ldots\text{přímka}$$

Aplikace určitého integrálu

b) Parametrickými rovnicemi

Křivka je zadána rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kde $x(t),\ y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Příklad

$$x = 2 + 3t\,,\ y = 1 - t\,,\ t \in R \quad \ldots \text{přímka}$$

$$x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi] \quad \ldots \text{kružnice.}$$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx \ . \tag{1}$$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x), \; x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\, dx \; . \tag{1}$$

Příklad

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x), \; x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\, dx \; . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\ . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\ . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a,b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\ . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a rovnoběžkami $x = a,\ x = b$,

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce
a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a,b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\ . \qquad (1)$$

Příklad
Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka
Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a rovnoběžkami $x = a,\ x = b$, přičemž pro $x \in [a,b]$ je $f_2(x) \leq f_1(x)$ je

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x), \; x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\, dx \; . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a rovnoběžkami $x = a, \; x = b$, přičemž pro $x \in [a, b]$ je $f_2(x) \leq f_1(x)$ je

$$P = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx \; .$$

Aplikace určitého integrálu

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x), \ x \in [a, b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \qquad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

kde funkce $x = x(t)$ má nenulovou spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, můžeme obsah vyjádřit ve tvaru

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)|x'(t)|\,dt\ .$$

(vzorec dostaneme substitucí $x = x(t)$, $f(x(t)) = y(t)$ z integrálu (1))

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

kde funkce $x = x(t)$ má nenulovou spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, můžeme obsah vyjádřit ve tvaru

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)|x'(t)|\, dt\ .$$

(vzorec dostaneme substitucí $x = x(t),\ f(x(t)) = y(t)$ z integrálu (1))

Příklad

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x),\ x \in [a, b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

kde funkce $x = x(t)$ má nenulovou spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, můžeme obsah vyjádřit ve tvaru

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)|x'(t)|\,dt\ .$$

(vzorec dostaneme substitucí $x = x(t),\ f(x(t)) = y(t)$ z integrálu (1))

Příklad
Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky
a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky

a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f',

Délka křivky
a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f', potom délku křivky vypočítáme ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \, .$$

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky

a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f', potom délku křivky vypočítáme ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \ .$$

Příklad

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky
a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f', potom délku křivky vypočítáme ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \ .$$

Příklad
Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t),\ y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$,

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t),\ y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$, pak je délka křivky dána vzorcem

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$, pak je délka křivky dána vzorcem

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

Příklad

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t),\ y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$, pak je délka křivky dána vzorcem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

Příklad

Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R.

Objem rotačního tělesa

Aplikace určitého integrálu

Objem rotačního tělesa

a) Uvažujme rovinný obrazec $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f.

Objem rotačního tělesa

a) Uvažujme rovinný obrazec $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \ .$$

Objem rotačního tělesa

a) Uvažujme rovinný obrazec $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\ .$$

Příklad

Aplikace určitého integrálu

Objem rotačního tělesa

a) Uvažujme rovinný obrazec $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\ .$$

Příklad

Určete objem koule o poloměru R.

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \leq a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f.

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte podle vzorce

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \ .$$

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte podle vzorce

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx\ .$$

Příklad

Aplikace určitého integrálu

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte podle vzorce

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \ .$$

Příklad
Určete objem polokoule o poloměru R.