

Matematika 1A (KMD/M1A-P) - cvičení 1

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2015/2016 a vyšší)

Příklad 1. Řešte v \mathbb{R} rovnice:

a) $8(3x - 5) - 5(2x - 8) = 20 + 4x$ [2] b) $\frac{6 + 25x}{15} - (x - 1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$ [\mathbb{R}]
c) $\frac{1}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 4} = \frac{6}{x^2 + 2x - 8} - 1$ [\emptyset] d) $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} = \frac{5}{x^2 + 6}$ [-12]
e) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}x - 1} + \frac{\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} = 2$ [2] f) $x^2 - 6x + 8 = 4 - x$ [$1; 4$]
g) $\frac{1}{x + 4} - \frac{4}{x - 4} + \frac{x^2 - 20}{x^2 - 16} = 0$ [$-5; 8$] h) $\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{x - 5} - \frac{1}{x - 2}$ [$\frac{16}{5}; 8$]

Příklad 2. Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

a) $\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 2}{3} - 5 < \frac{x - 1}{2}$ [2]
b) $-5(1 - x)^2 \leq 3x - 11$ [$(-\infty; -\frac{3}{5}) \cup (2; +\infty)$]
c) $2x^2 - 9x - 35 \leq 0$ [$(-\frac{5}{2}; 7)$]
d) $\frac{x + 6}{x - 1} < 2$ [$(-\infty; 1) \cup (8; +\infty)$]
e) $\frac{x^2}{x - 1} \geq x + 2$ [(1; 2)]
f) $\frac{x - 1}{x + 2} + \frac{x + 3}{x - 4} \leq 2$ [$(-\infty; -\frac{13}{2}) \cup (-2; 4)$]

Příklad 3. Řešte v \mathbb{R} rovnice:

a) $3^x + 3^{x+1} = 108$ [3] b) $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$ [2]
c) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ [0; 3] d) $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 33$ [$\log_4 \left(\frac{33}{2} \right)$]
e) $\log(7x + 6) = 1 + \log(3x - 4)$ [2] f) $\ln(x) + 3 = 0$ [e^{-3}]

Příklad 4. Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

a) $3^{2x} > 2 \cdot 3^x + 3$ [(1; $+\infty$)] b) $25^x + 2 \cdot 5^{x+1} > 11$ [\mathbb{R}^+]
c) $\log_2(x + 2) > 3$ [(6; $+\infty$)] d) $\frac{\log(3x + 1)}{\log(2x)} \geq 0$ [$(\frac{1}{2}; +\infty)$]

Příklad 5. Zakreslete následující množiny a určete jejich sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk v množině D :

a) $M = \langle 1, 2 \rangle$, $N = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 1\}$, $D = \mathbb{R}_0^+$
[$M \cup N = \langle 1, 4 \rangle - \{2\}$, $M \cap N = \emptyset$, $M \setminus N = \langle 1, 2 \rangle$, $N \setminus M = (2, 4)$, $M'_D = \langle 0, 1 \rangle \cup (2, +\infty)$,
 $N'_D = \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$]
b) $M = (4, 8)$, $N = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 2\}$, $D = \mathbb{R}^+$
[$M \cup N = \langle 4, 8 \rangle$, $M \cap N = (4, 8)$, $M \setminus N = \emptyset$, $N \setminus M = \{4, 8\}$, $M'_D = (0, 4) \cup (8, +\infty)$,
 $N'_D = (0, 4) \cup (8, +\infty)$]
c) $M = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 4\}$, $N = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25\}$, $D = \mathbb{Z}$
[$M = N = M \cup N = M \cap N = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$, $M \setminus N = N \setminus M = \emptyset$,
 $M'_D = N'_D = \{\dots, -6, -5, 5, 6, \dots\}$]

Příklad 6. Pro množiny představující jednotlivá řešení z Příkladu 5 určete jejich minimum a maximum (pokud existují), dále infimum a supremum na rozšířené reálné ose \mathbb{R}^* . Rozhodněte také, zda jsou tyto množiny omezené (příp. shora/zdola) a konečné.