

Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

26. 9. 2016

Základní pojmy výrokové logiky

Matematický text je členěn na :

Definice

Věty

Příklady

Definice - zavádí pojmy (vysvětluje význam matematických termínů)

Věta - je formulována jako výrok (tj. lze rozhodnout, zda je pravdivá či nepravdivá)

- má jednu z následujících struktur

a) $A \implies B$ jestliže A, pak B (z A plyne B)

b) $A \iff B$ A právě tehdy, když B (A je ekvivalentní B)

Implikace $A \implies B$

B je nutnou podmínkou platnosti A

A je postačující podmínkou platnosti B

Ekvivalence $A \iff B$

A je nutnou a postačující podmínkou platnosti B

Příklad - demonstruje obecné pojmy v konkrétních situacích

Číselné množiny

Přirozená čísla

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

Celá čísla

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} .$$

Racionální čísla

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0 \right\} .$$

$$N \subset Z \subset Q .$$

$$N \neq Z \quad -1 \notin N$$

$$Z \neq Q \quad \frac{2}{3} \notin Z$$

- lze znázornit na reálné ose

N, Z, Q jsou uspořádány $x < y$ (x leží na reálné ose vlevo od y)

$x \leq y$ (x leží na reálné ose vlevo od y nebo na y)

Číselné množiny

Věta

Množina racionálních čísel je hustě rozložena na ose reálných čísel.

význam : $x, y \in R \quad x < y \implies \exists r \in Q$ tak, že $x < r < y$
(mezi každými dvěma reálnými čísly lze nalézt nějaké racionální číslo)

$$\sqrt{2} \notin Q$$

Reálná čísla

R ... číslo, kterému na reálné ose odpovídá bod

Iracionální čísla

$$I = R \setminus Q$$

$$Q \subset R .$$

$$Q \neq R \quad \sqrt{2} \notin Q$$

R jsou uspořádány binární relací $<$, \leq (resp. $>$, \geq)

Číselné množiny

Rozšířená reálná osa

$$R^* = R \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Operace s nekonečny

Je-li $a \in R$, definujeme

$$\infty + \infty = a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{nelze } \infty - \infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$\infty - (-\infty) = a - (-\infty) = a - (-\infty) = \infty$$

$$-\infty - \infty = a - \infty = -\infty + a = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad \text{nelze } 0 \cdot \infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad \text{nelze } 0 \cdot (-\infty)$$

Číselné množiny

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{nelze } \frac{\infty}{0} \\ \text{nelze } \frac{\infty}{\infty} \end{array}$$

$$\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{nelze } \frac{-\infty}{0} \\ \text{nelze } \frac{-\infty}{-\infty} \quad \frac{-\infty}{\infty} \quad \frac{\infty}{-\infty} \end{array}$$

Číselné množiny

Definice

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ nazýváme **maximum množiny A** , jestliže platí

$$x \in A \implies x \leq a$$

značíme $a = \max A$.

Číslo $b \in A$ nazýváme **minimum množiny A** , jestliže platí

$$x \in A \implies b \leq x$$

značíme $b = \min A$.

Příklad

- 1) A konečná \implies existuje $\max A$ $\min A$.
- 2) A nekonečná, pak nemusí existovat maximum ani minimum A .
 \mathbb{N}
 $(0, 1)$

Číselné množiny

Definice

Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá **shora omezená**, jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$x \in A \implies x \leq c$$

Číslo c se nazývá **horní závora množiny A** .

Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá **zdola omezená**, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$x \in A \implies d \leq x$$

Číslo d se nazývá **dolní závora množiny A** .

Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Poznámka

Čísla c , d nemusí patřit do množiny A .

Příklad

$A = (0, 1)$ 2 je horní závora
 -1 je dolní závora.

Číselné množiny

Věta (o supremu)

Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, shora omezená. Pak existuje právě jedno $M \in \mathbb{R}$ těchto dvou vlastností

1) $x \leq M \quad \forall x \in A$

2) Je-li $M_1 < M \implies$ existuje alespoň jedno $x_1 \in A$ takové, že $M_1 < x_1$.

Definice

Číslo $M \in \mathbb{R}$ splňující vlastnosti 1) a 2) nazýváme

supremum množiny A .

značíme $M = \sup A$

Poznámka

Supremum množiny A je nejmenší horní závora.

Příklad

$$A = (0, 1) \quad 1 = \sup A$$

Číselné množiny

Poznámka (význam věty o supremu)

Věta o supremu říká, že každá neprázdná, shora omezená podmnožina množiny reálných čísel má právě jedno supremum.

Poznámka

1) Je-li c je maximum množiny A , pak c je supremum A .

Příklad

$$A = \langle 1, 4 \rangle$$

2) Je-li c je supremum množiny A , pak c nemusí být maximem A .

Příklad

$$A = (1, 3)$$

Číselné množiny

Definice

Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Pak $m \in \mathbb{R}$ nazýváme

infimum množiny A , jestliže platí

1) $x \geq m \quad \forall x \in A$

2) Je-li $m_1 > m \implies$ existuje alespoň jedno $x_1 \in A$ takové, že $x_1 < m_1$.
značíme $m = \inf A$

Věta (o infimu)

Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, zdola omezená. Pak existuje právě jedno infimum množiny A .

Poznámka

Věta o supremu neplatí, omezíme-li se při řešení matematických úloh pouze na racionální čísla (jsou mezi nimi díry), což by vedlo k problémům s existencí řešení řady úloh.