Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

3. 10. 2016

Funkce

Definice (obecný pojem funkce)
Jsou-li A a B libovolné množiny,
pak **funkcí f množiny A do množiny B** rozumíme předpis,
který každému prvku $x \in A$ přiřazuje jediný prvek množiny $y \in B$,
píšeme $y = f(x)$.
Množina A se nazývá **definiční obor funkce f** a značí se $D(f)$,
množina $\{y \in B; \text{existuje } x \in A \text{ takový, že } y = f(x)\}$ se nazývá **obor hodnot funkce f**
a značí se $H(f)$.

Definice (pojem funkce jedné proměnné)
Funkcí f jedné proměnné rozumíme funkci f množiny $M \subset R$ do množiny R.

Způsoby zadání funkce : 1) Výrazem
2) slovním předpisem
3) tabulkou

Funkce

Definice
Je-li funkce f dána výrazem $y = f(x)$. Pak x nazveme **nezávisle proměnná** (nebo **argument**) a y **závisle proměnná**.
Pro pevně zvolenou hodnotu a nezávisle proměnné se číslo $f(a)$ nazývá **hodnota funkce f v bodě a**.

Poznámka
Je-li funkce f zadána výrazem bez udání definičního oboru, považujeme za $D(f)$ množinu všech čísel, pro něž příslušný výraz existuje.

Definice (graf funkce)
Množinu všech bodů $[x, y]$ roviny takových,že $x \in D(f)$, $y = f(x)$ nazveme **graf funkce f**.

Definice (rovnost funkcí)
Řekneme, že funkce **f a g jsou si rovny**, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = g(x)$;
píšeme pak $f = g$,
v opačném případě píšeme $f \neq g$.

Funkce

Definice (operace s funkcemi)
Součet $f + g$ funkcí f a g se definuje jako funkce h, kde $h(x) = f(x) + g(x)$ pro každé x, pro něž tento výraz existuje.
Rozdíl $f - g$ funkcí f a g se definuje jako funkce h, kde $h(x) = f(x) - g(x)$ pro každé x, pro něž tento výraz existuje.
Součin $f.g$ funkcí f a g se definuje jako funkce h, kde $h(x) = f(x).g(x)$ pro každé x, pro něž tento výraz existuje.
Podíl $\frac{f}{g}$ funkcí f a g se definuje jako funkce h, kde $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pro každé x, pro něž tento výraz existuje.

Funkce

Definice (typy funkcí)
Funkce f se nazývá **rostoucí**, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **klesající**, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **neklesající**, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **nerostoucí**, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá **ryze monotónní**.
Funkce, která je neklesající nebo nerostoucí, se nazývá **monotónní**.

Věta
Každá ryze monotónní funkce je monotónní.

Funkce

Poznámka
Obdobně se definuje monotónnost, případně ryzí monotónnost, na podmnožině M , v příslušných definicích se úsek "$x_1, x_2 \in D(f)$" nahradí úsekem "$x_1, x_2 \in M$".

Funkce f se nazývá **zdola**, resp. **shora omezená**, jestliže její obor hodnot $H(f)$ je zdola, resp. shora omezená množina.
Funkce se nazývá **omezená**, jestliže je zdola omezená a shora omezená.
Analogicky se definuje na množině $M \subset D(f)$.

Funkce f se nazývá **sudá**, resp. **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$ a pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

Funkce f se nazývá **periodická s periodou** $p > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je také $x + p \in D(f)$ a $x - p \in D(f)$ a pro každé $x \in D(f)$ je $f(x + p) = f(x) = f(x - p)$.

Funkce

Definice
Funkce $f : A \to B$ se nazývá **prostá**, jestliže platí

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \; .$$

Věta
Každá ryze monotónní funkce je prostá.

Funkce

Definice

Nechť $f : A \to B$ je dána. **Množinou funkčních hodnot funkce** f (ozn. $f(A)$) rozumíme množinu všech $y \in B$ pro něž existuje $x \in A$ takové, že $y = f(x)$.

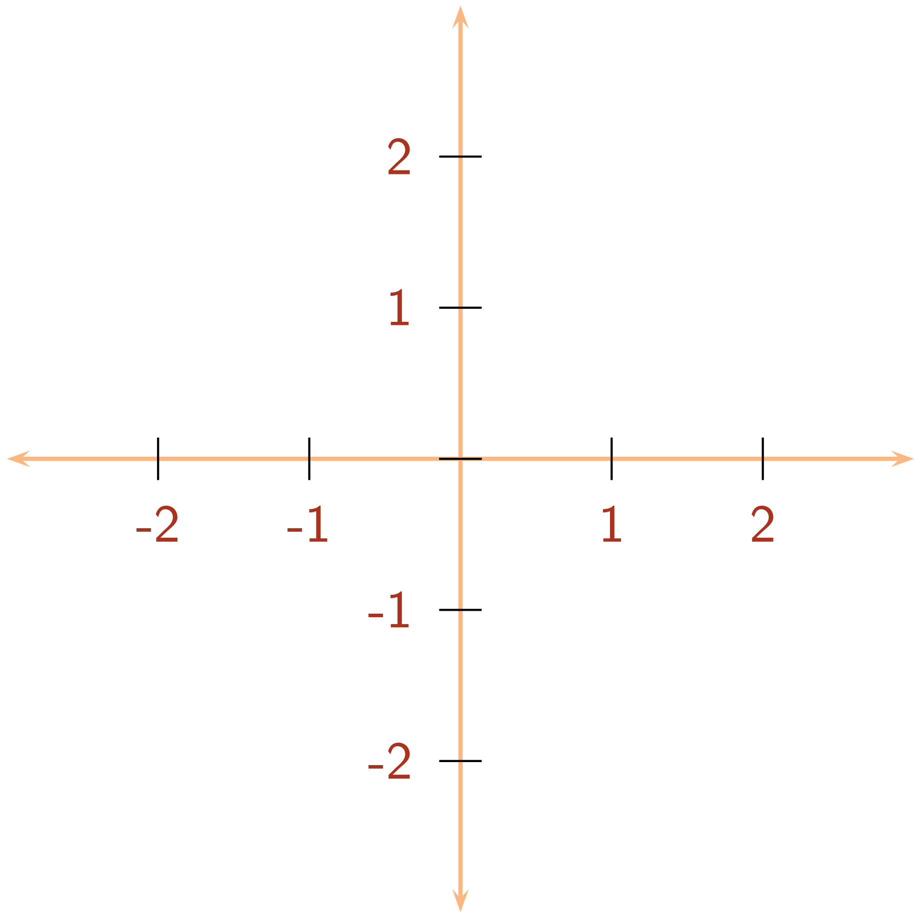
Poznámka

$f(A) \subset B$, ale může být $f(A) \neq B$.

Definice

Říkáme, že funkce $f : A \to B$ **zobrazuje množinou A na množinu B**, jestliže $f(A) = B$.

Konstantní funkce



Konstantní funkce

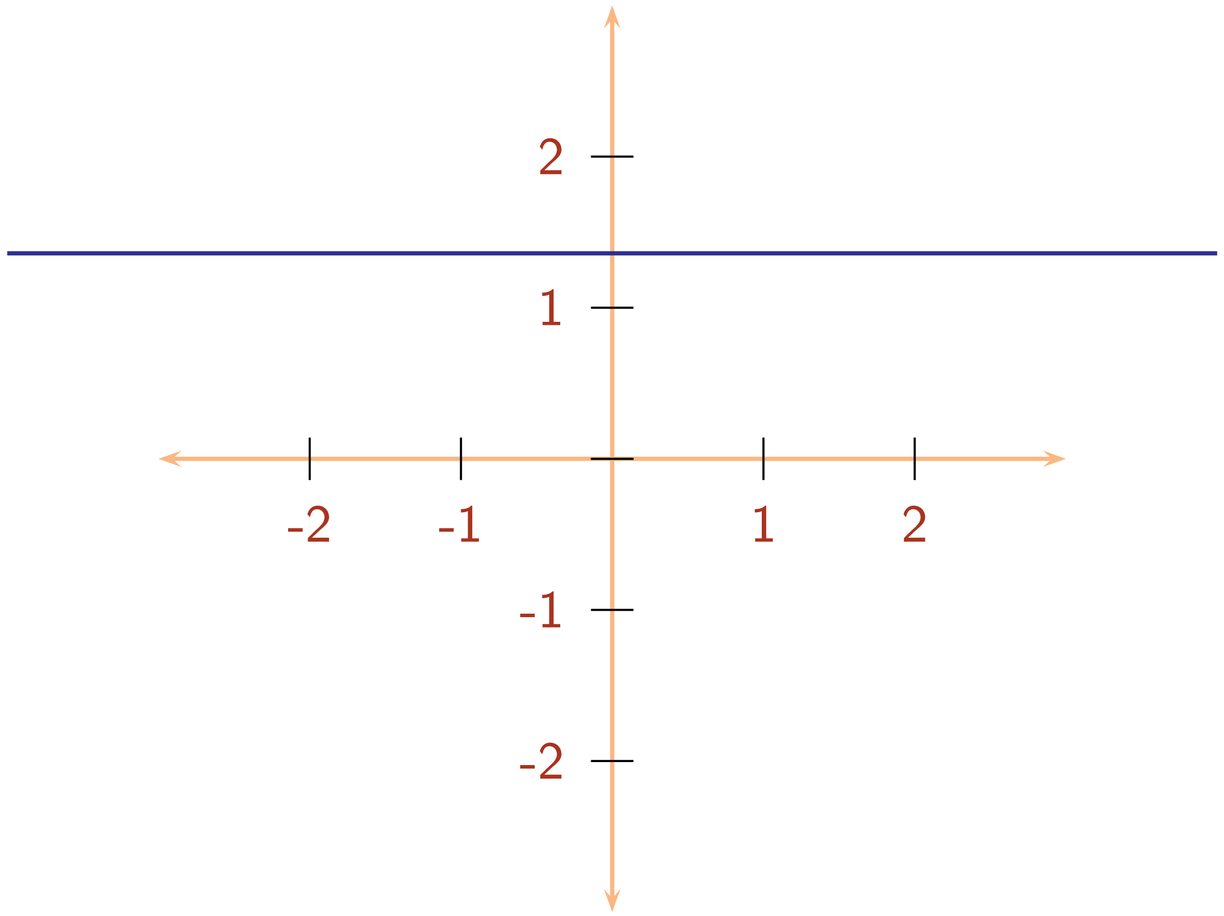


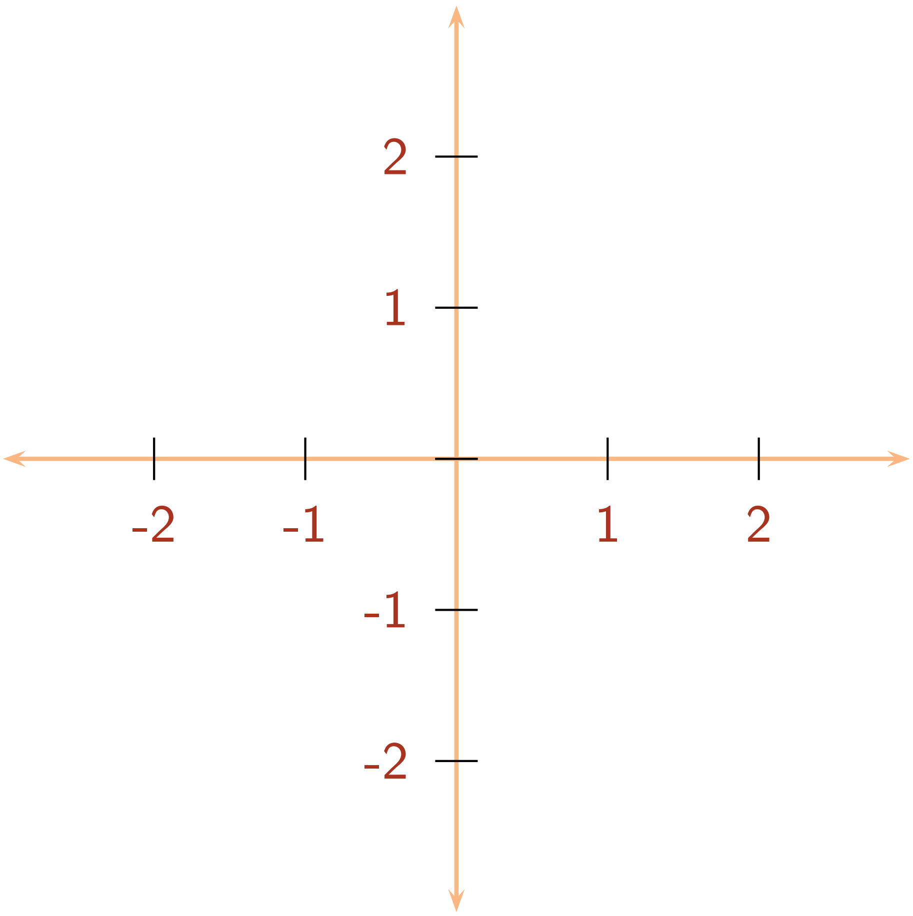
Fig 1

Identita

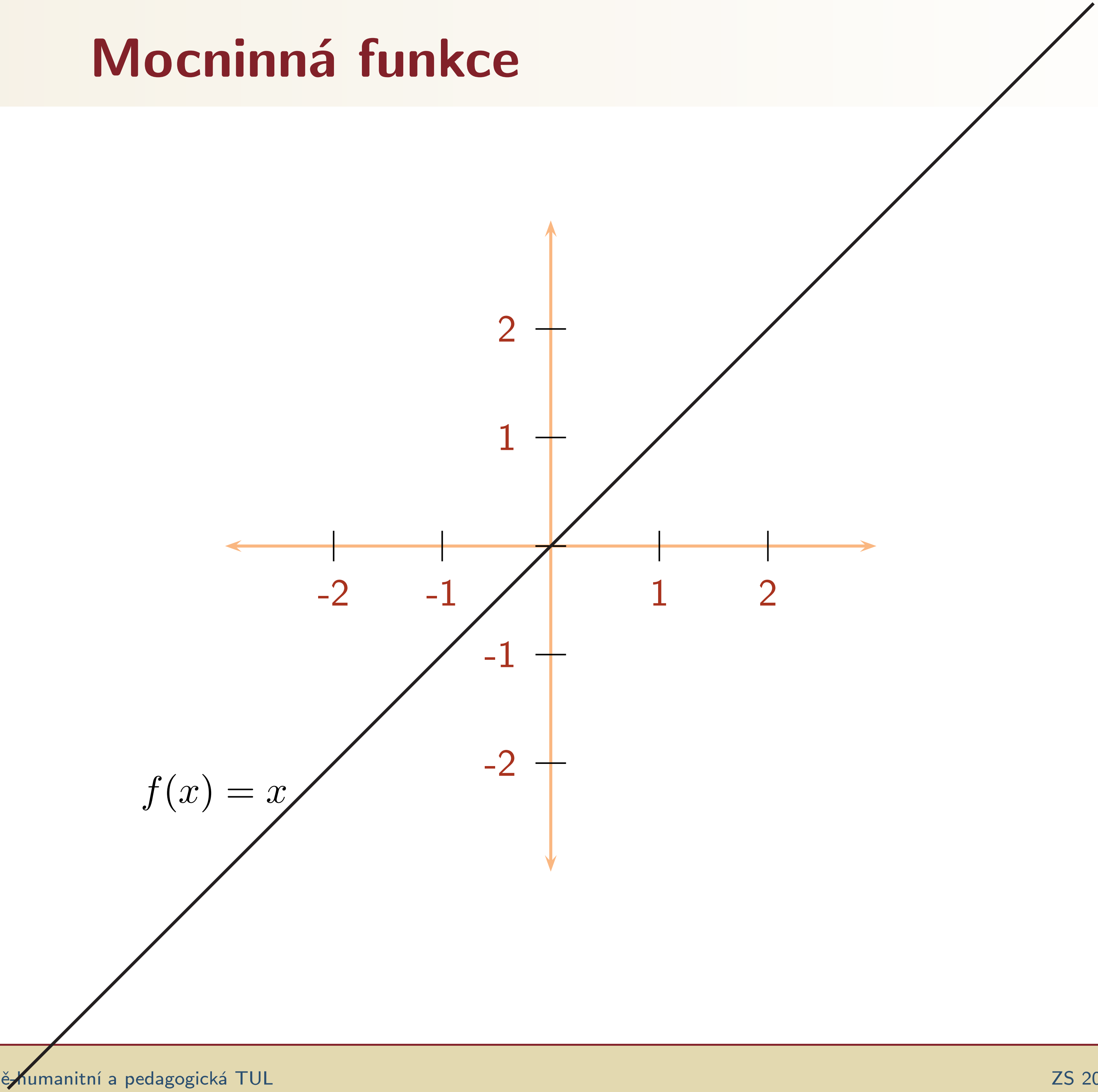
Definice
Funkce $f : A \to A$ se nazývá **identická na A** , právě tehdy když pro všechna $x \in A$ platí $f(x) = x$.
značíme : id_A

Poznámka
$\mathrm{id}_A(x) = x$
$\mathrm{id}_A : A \to A$ je prostá a na.

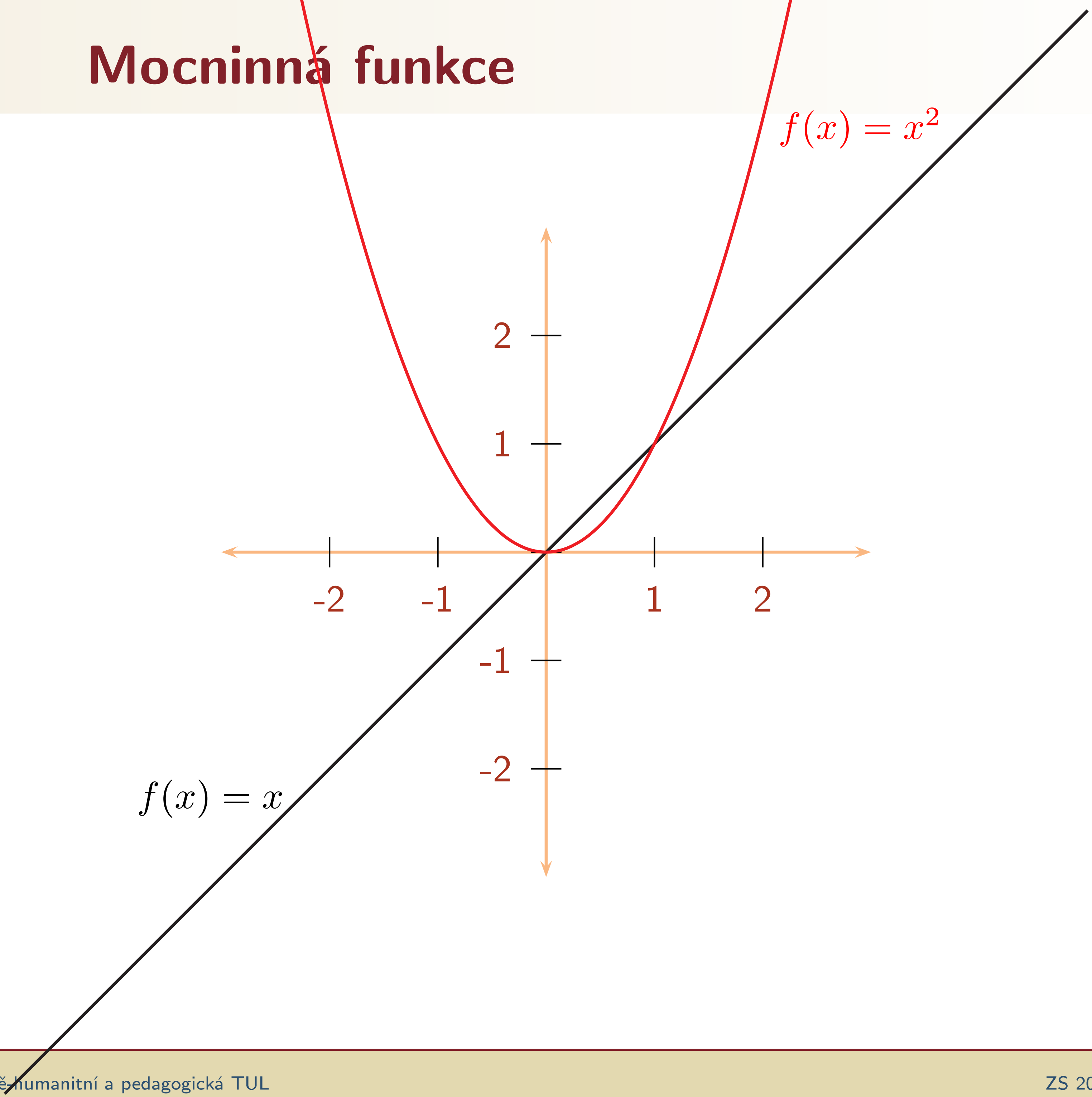
Mocninná funkce



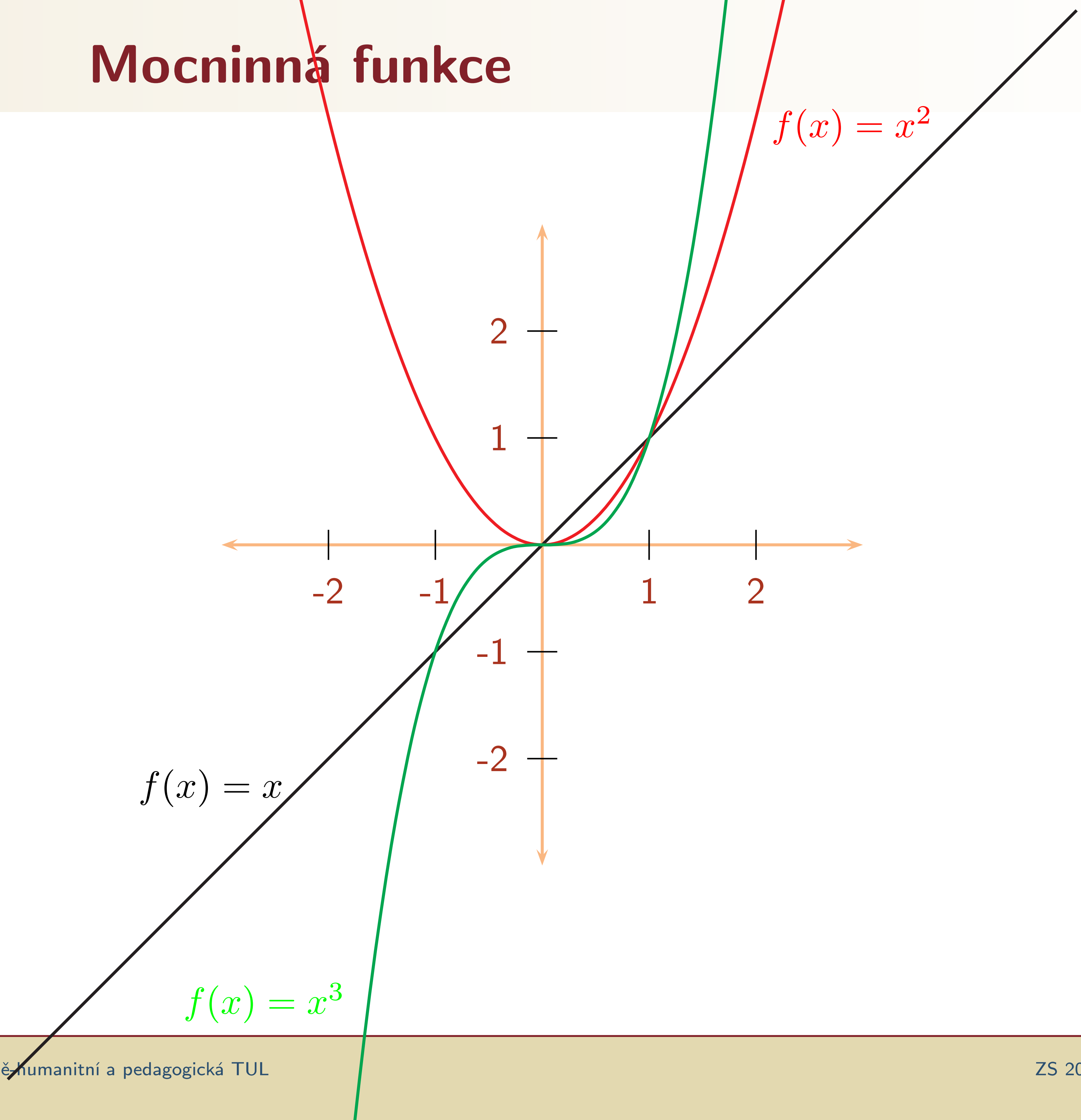
Mocninná funkce



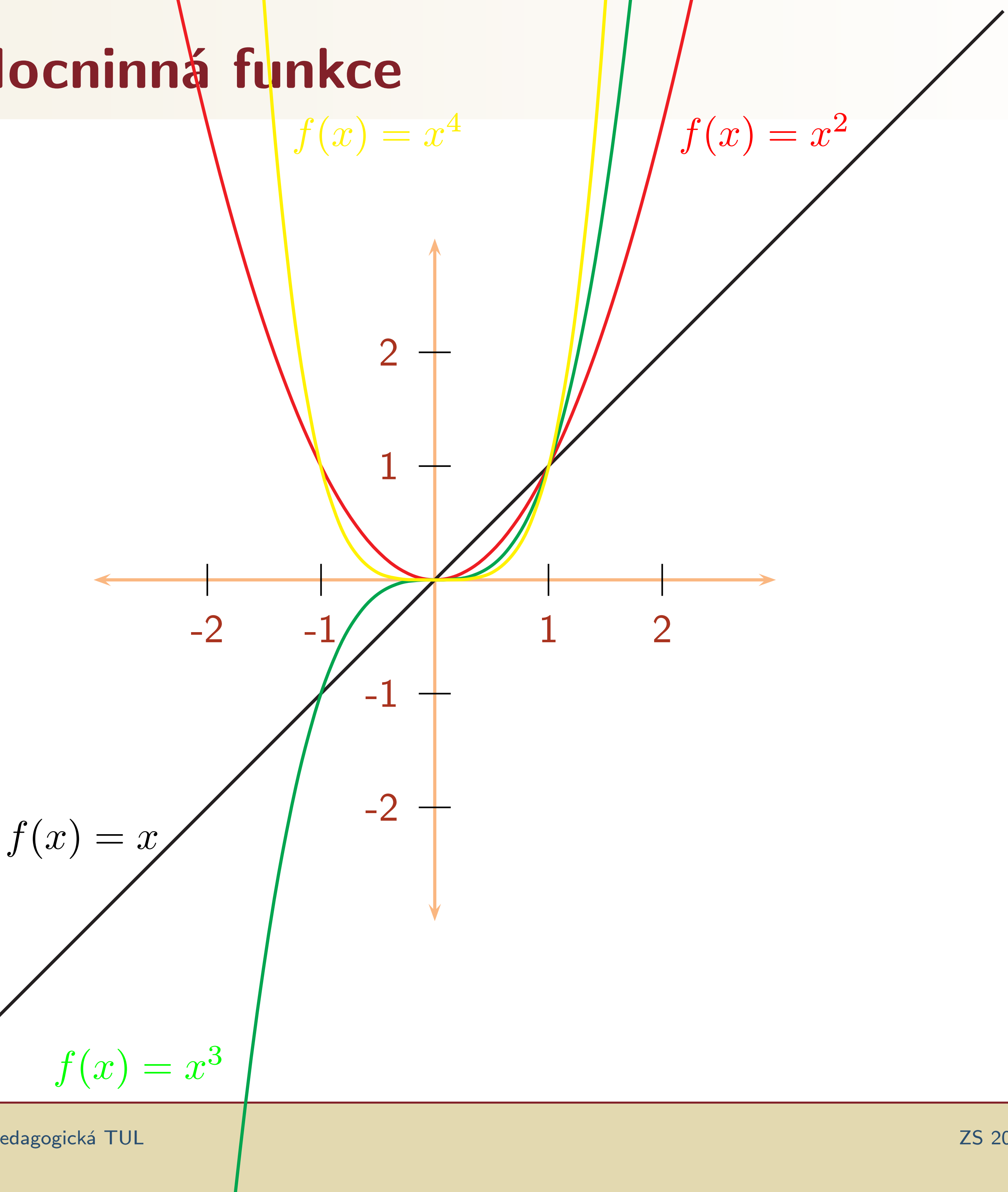
Mocninná funkce



Mocninná funkce



Mocninná funkce



Mocninná funkce

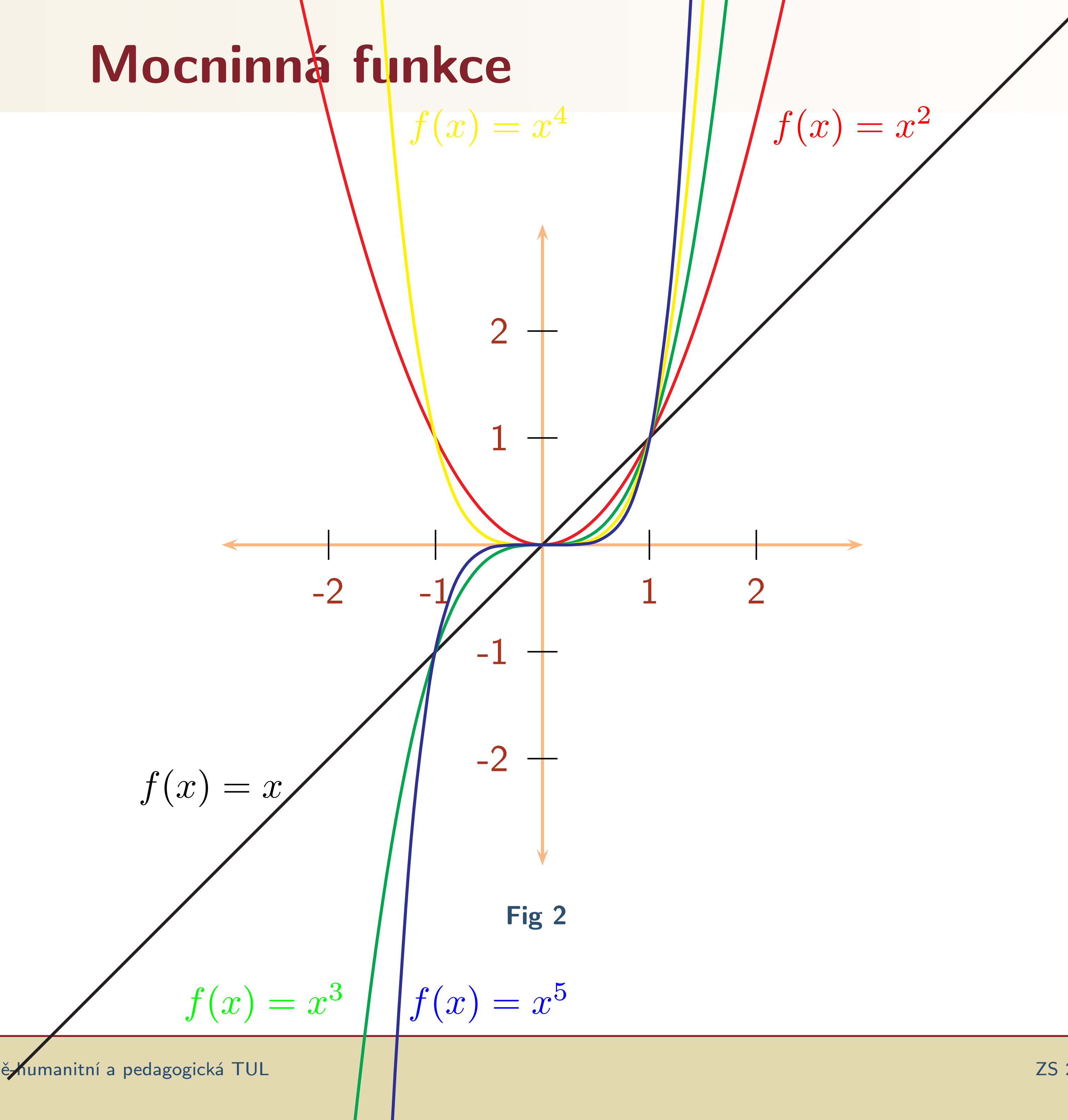
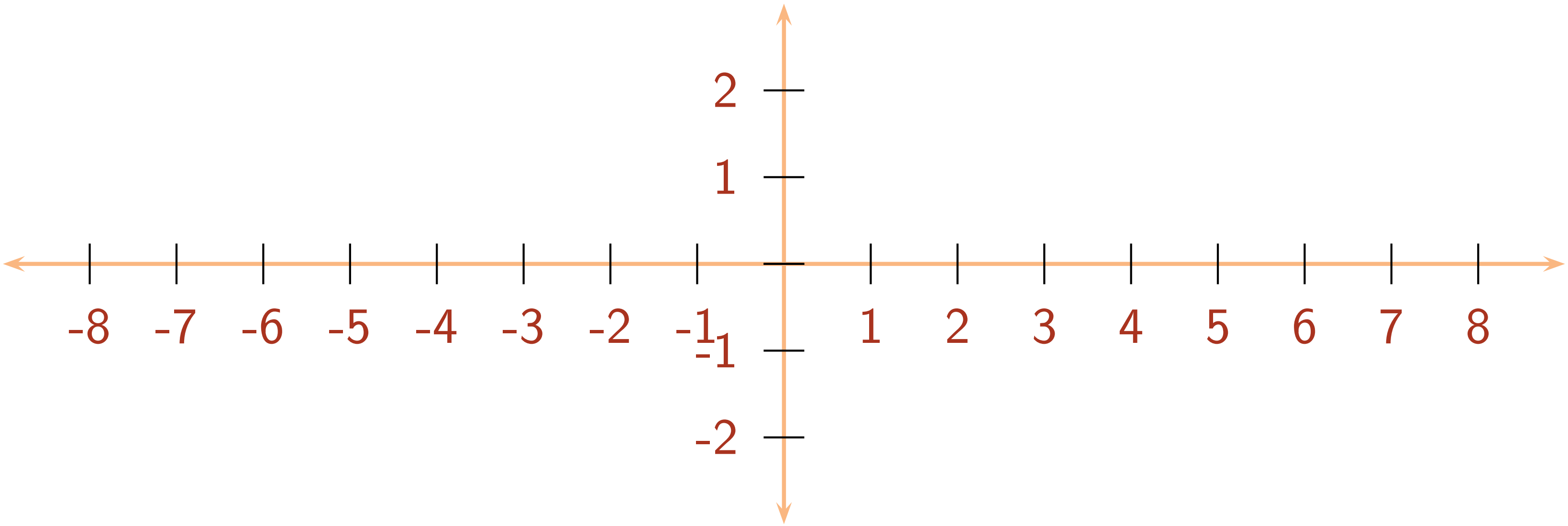
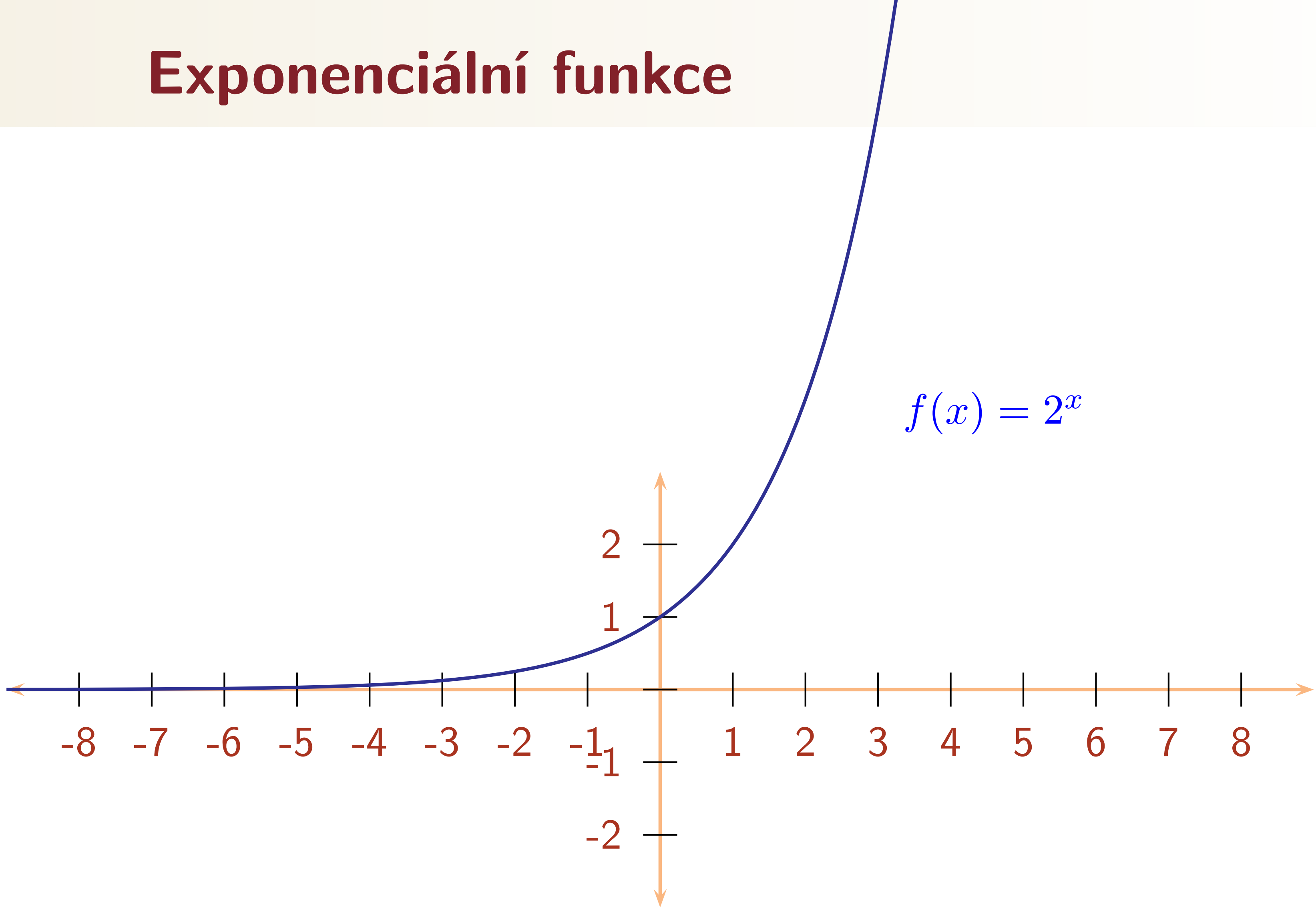


Fig 2

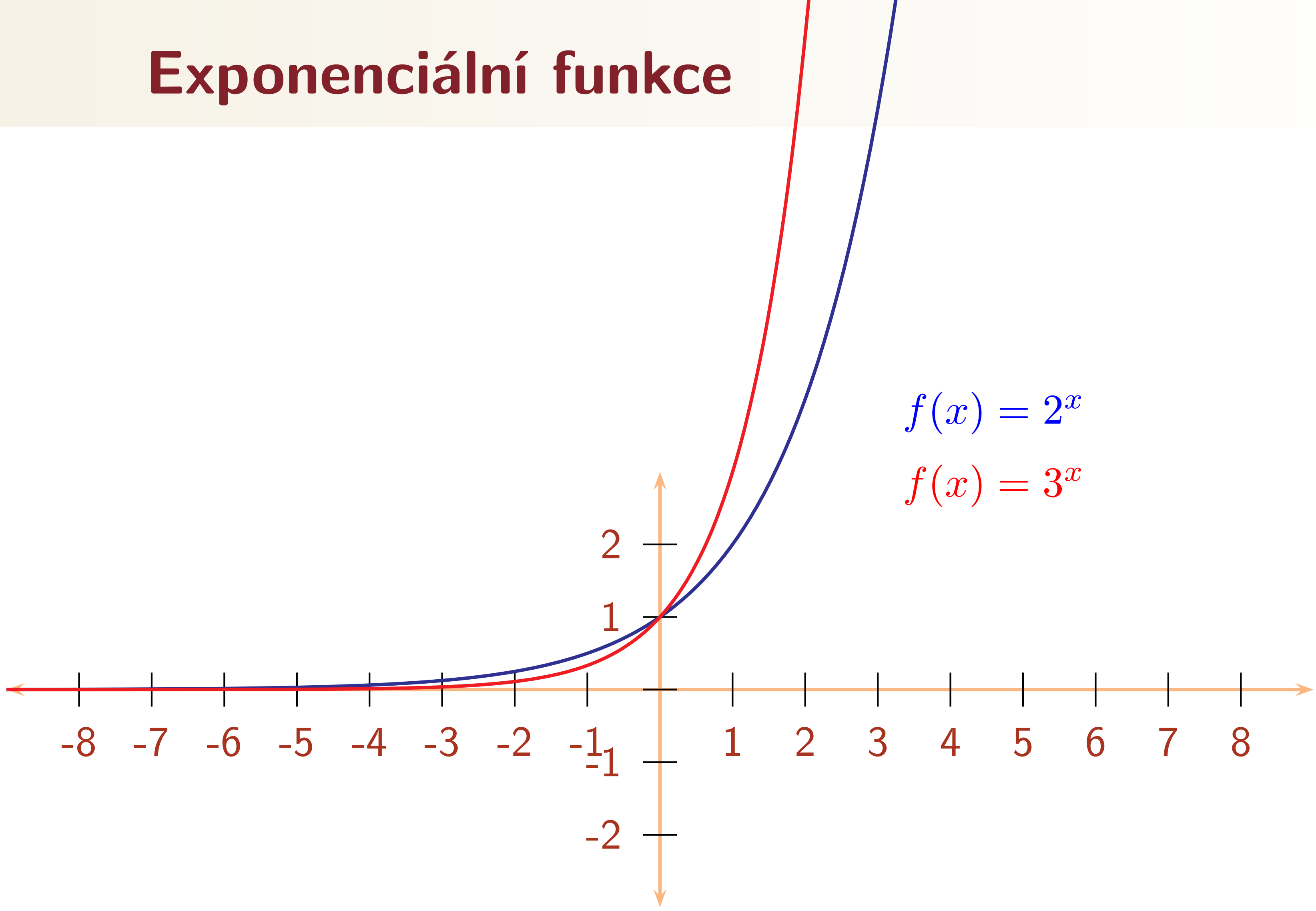
Exponenciální funkce



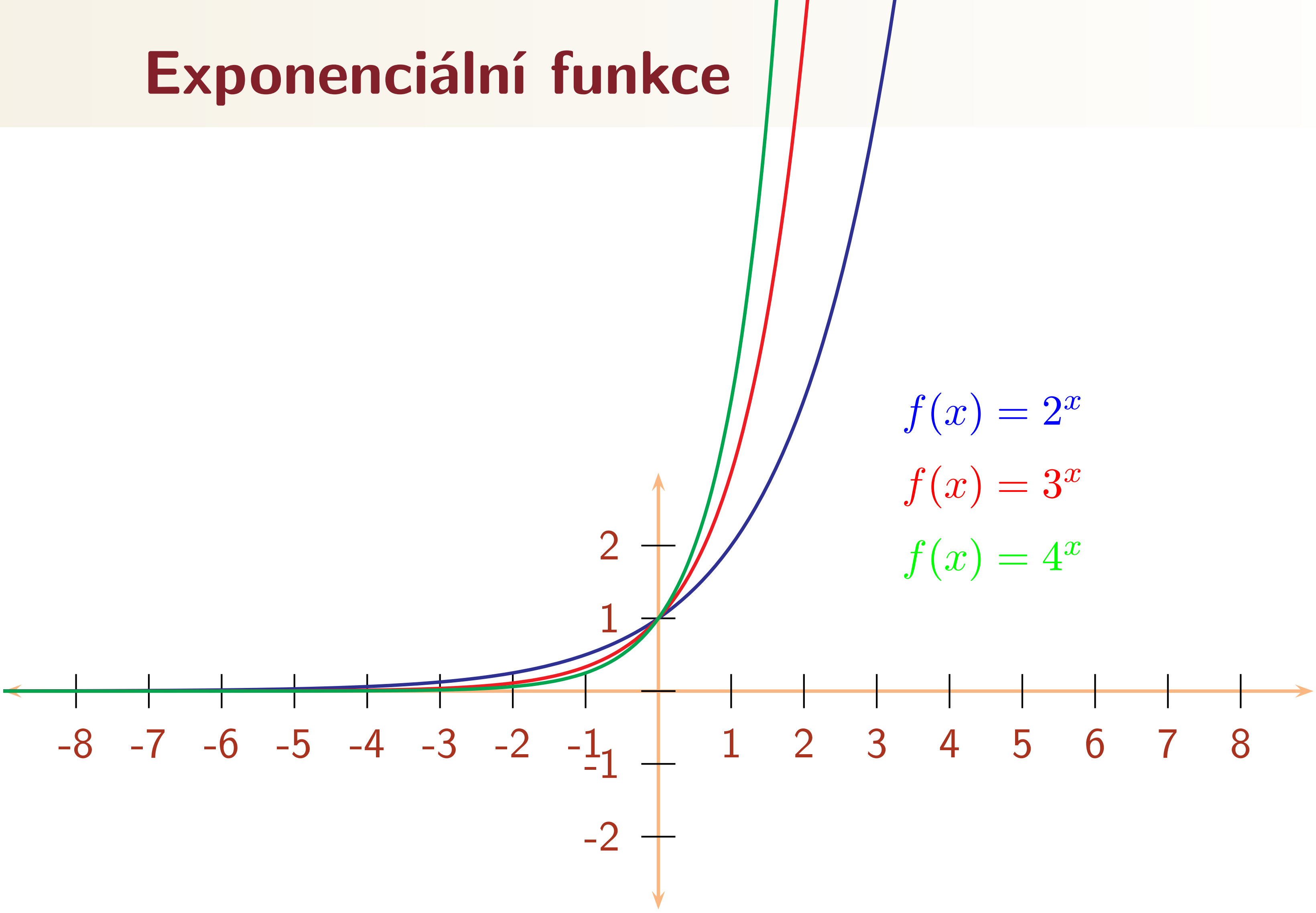
Exponenciální funkce



Exponenciální funkce



Exponenciální funkce



Exponenciální funkce

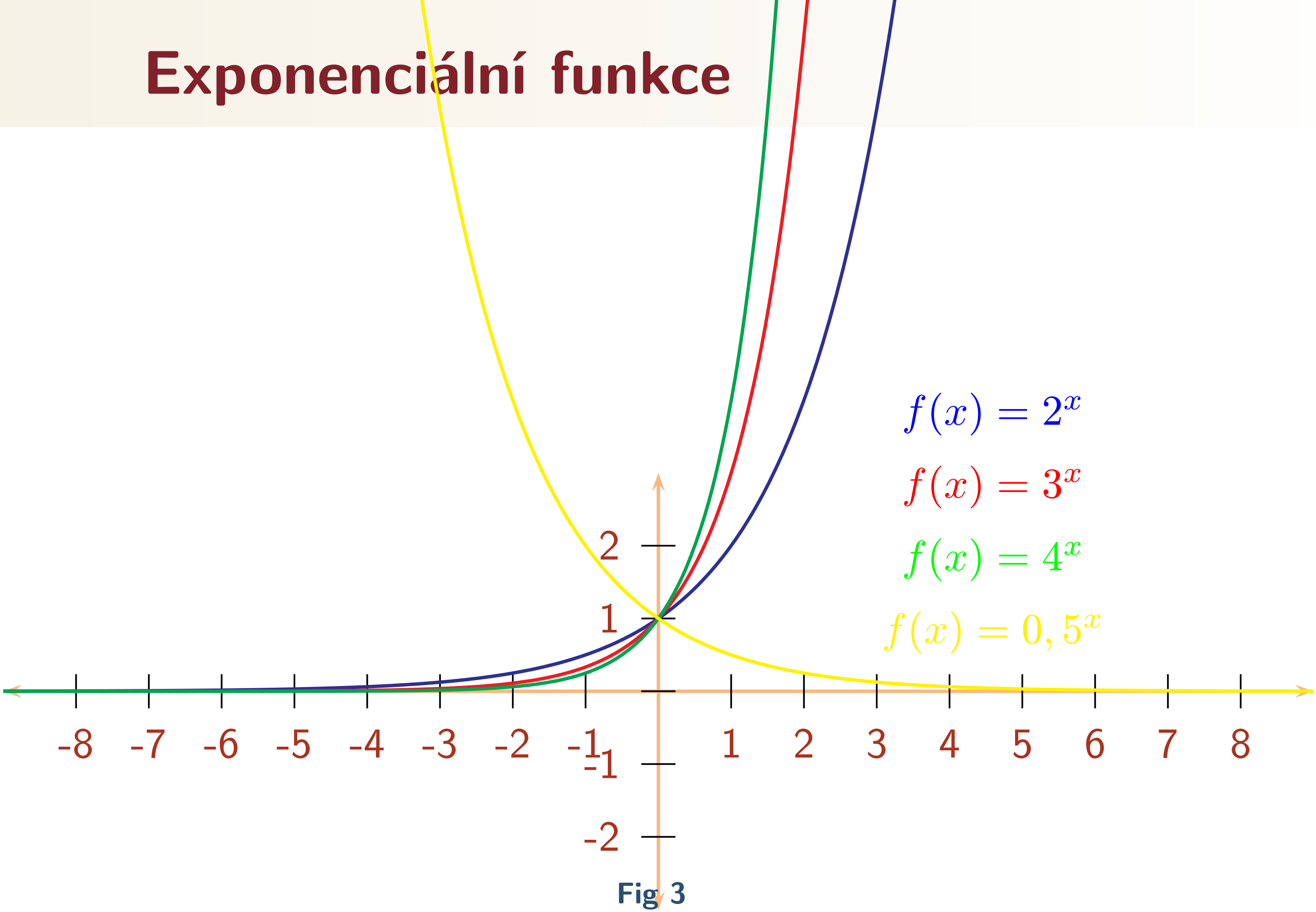
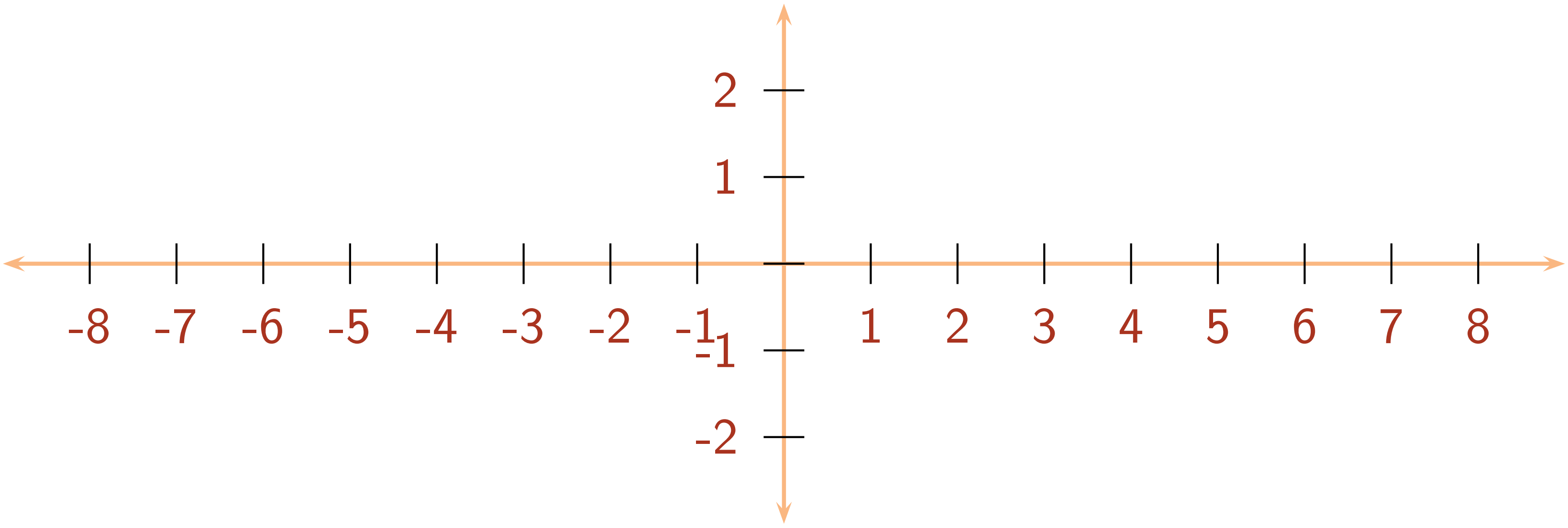


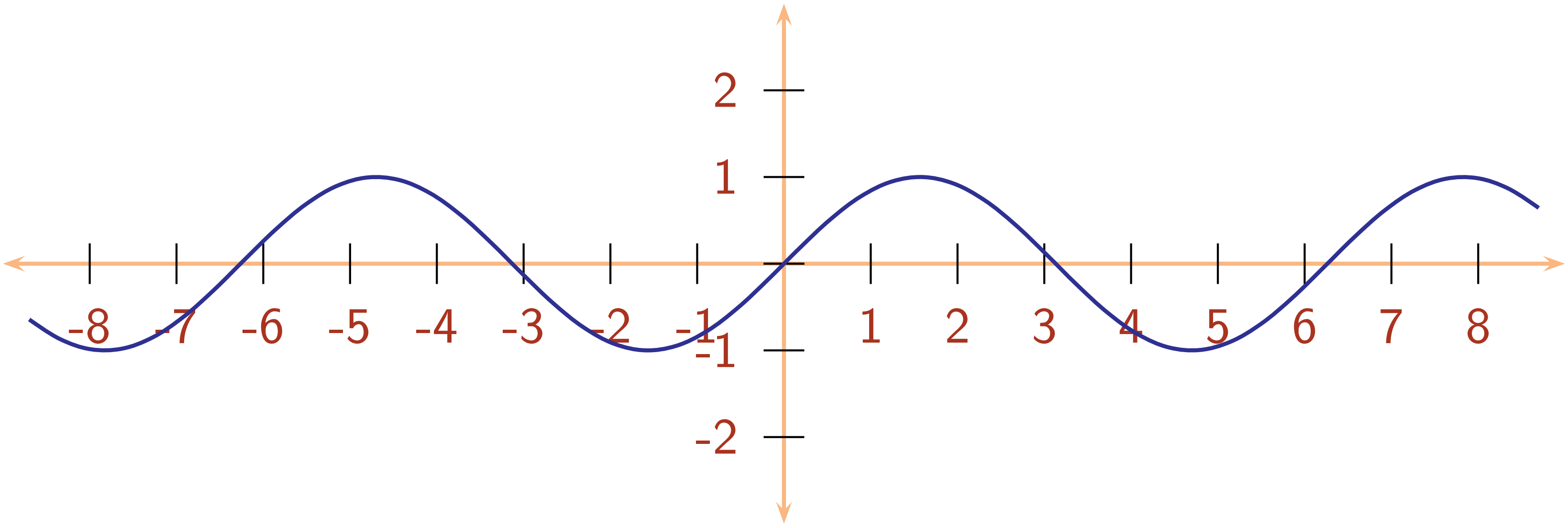
Fig 3

Goniometrické funkce



Goniometrické funkce

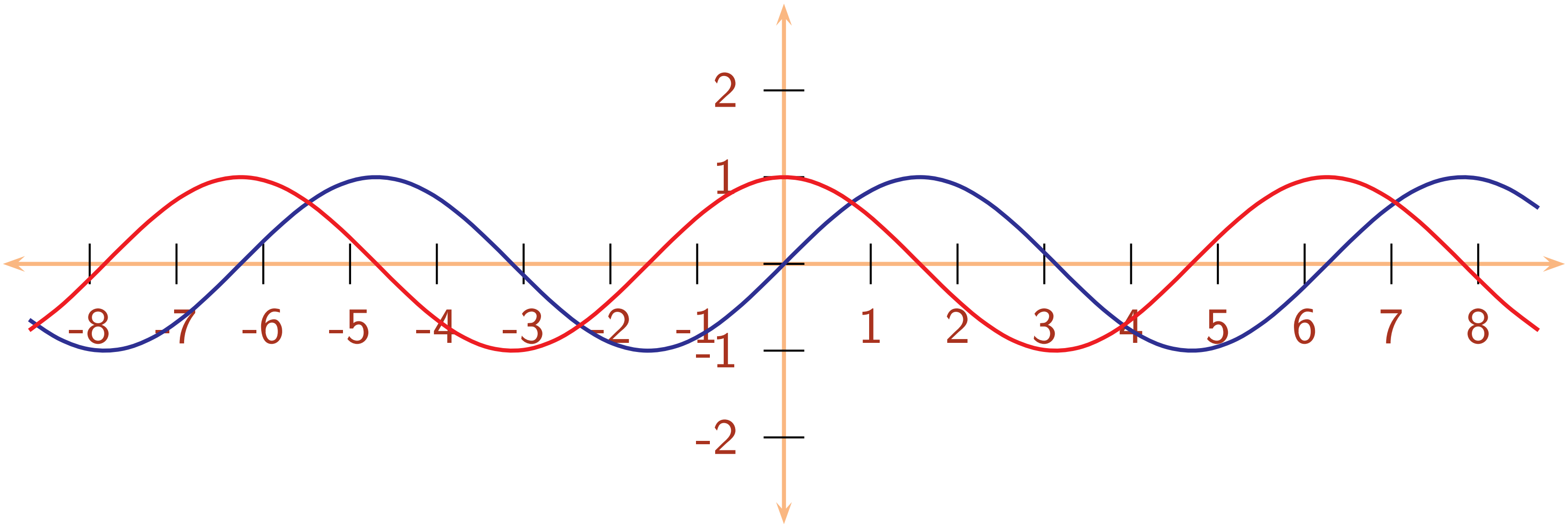
$$f(x) = \sin x$$



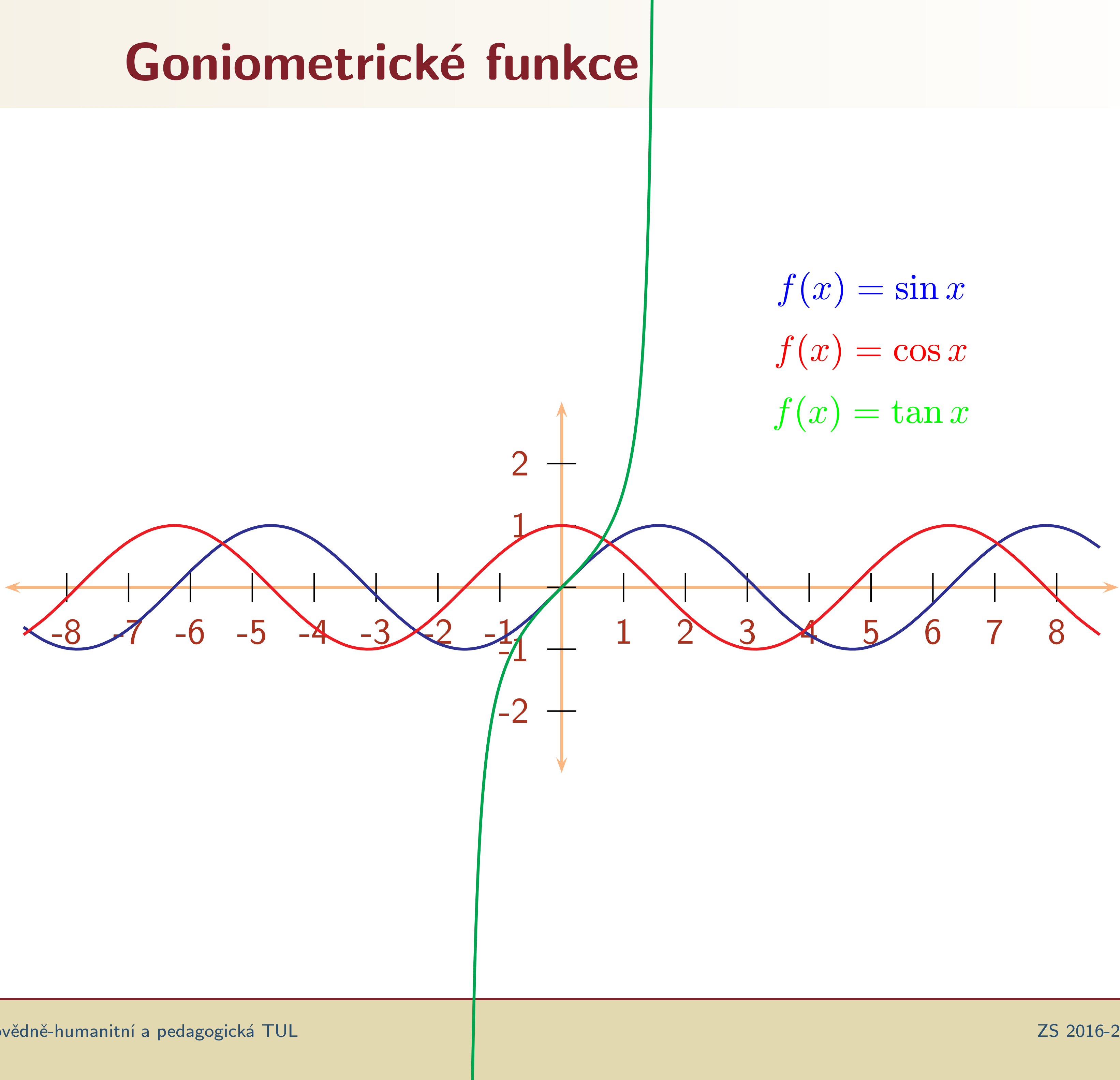
Goniometrické funkce

$$f(x) = \sin x$$

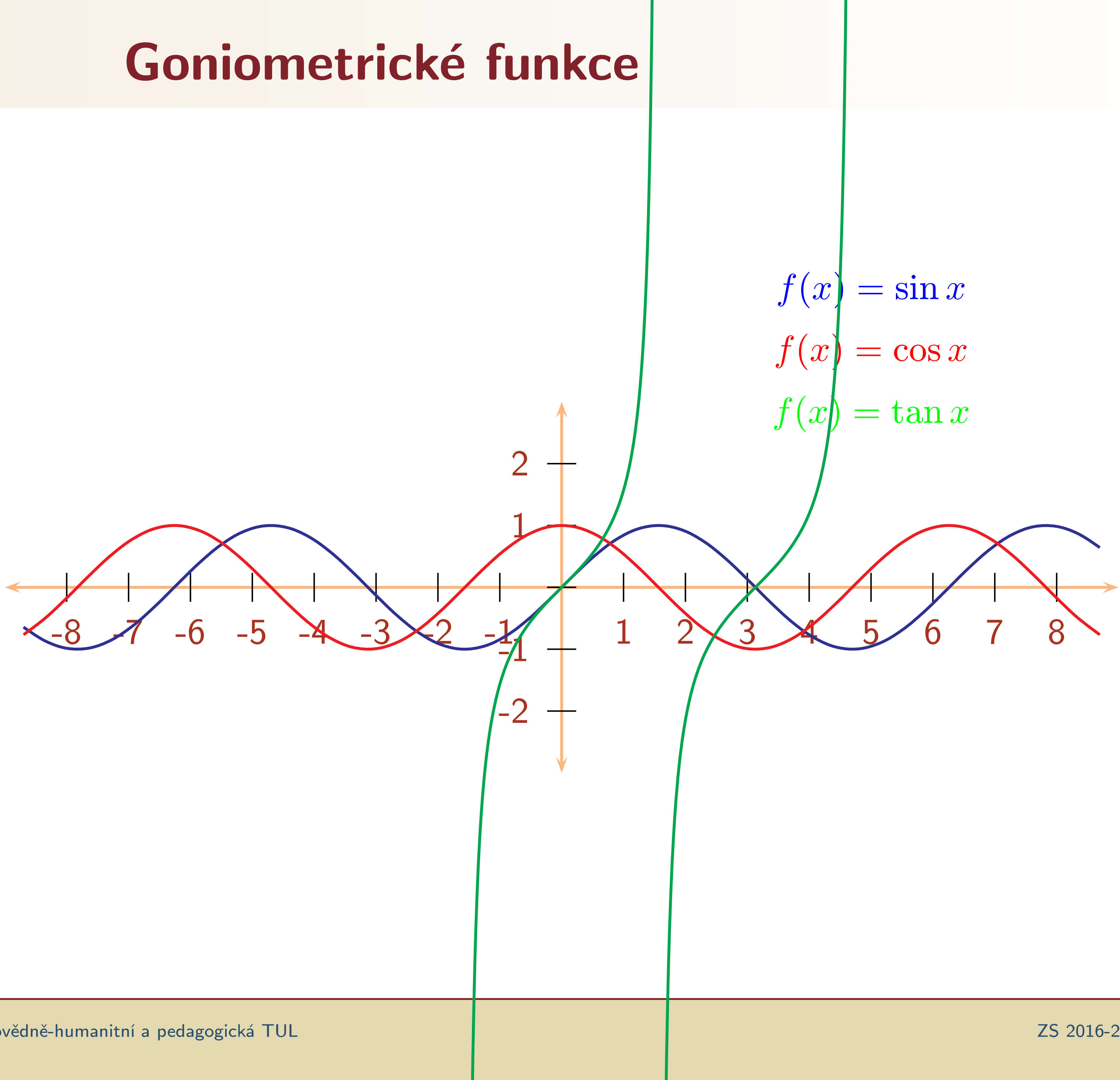
$$f(x) = \cos x$$



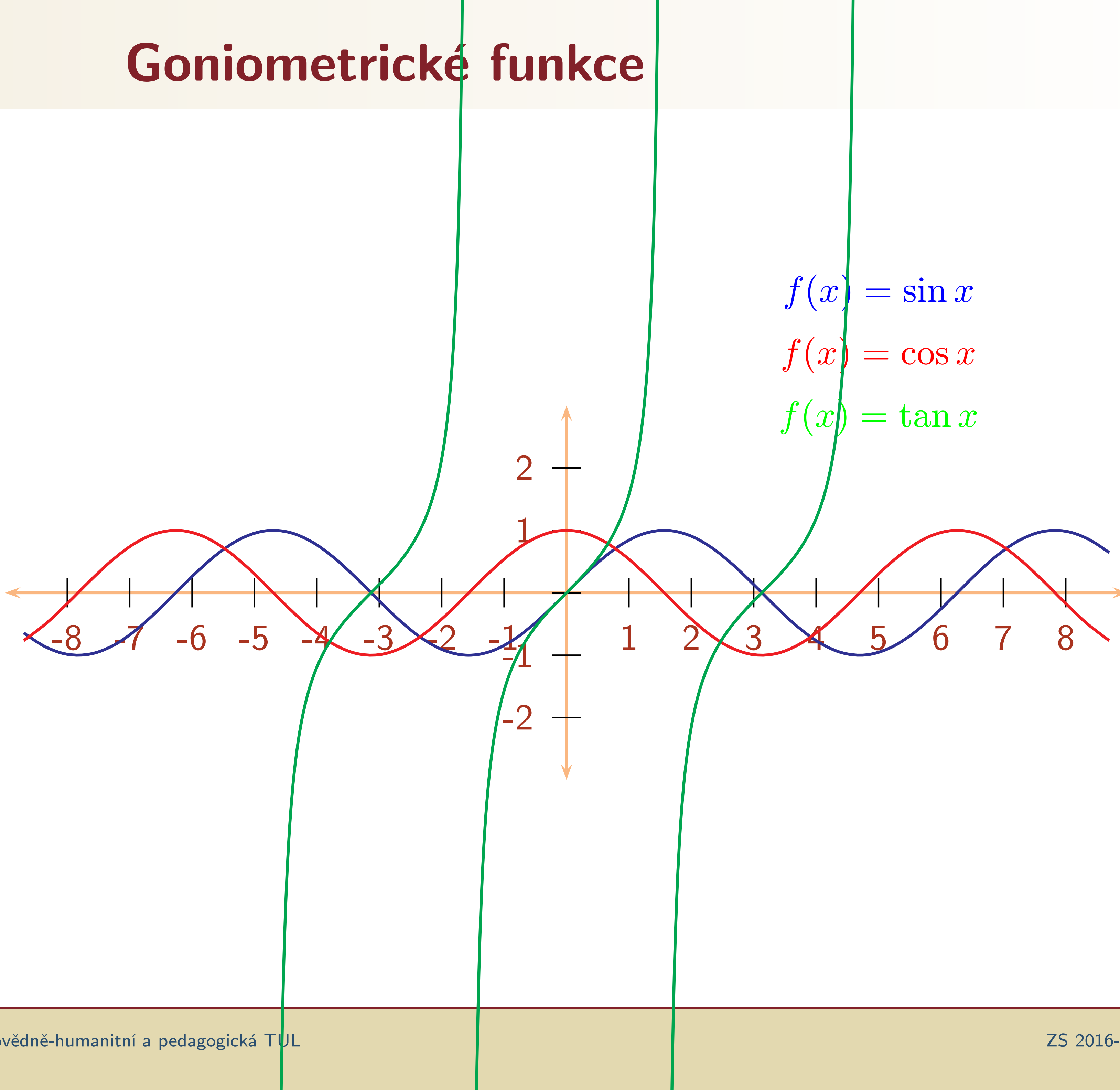
Goniometrické funkce



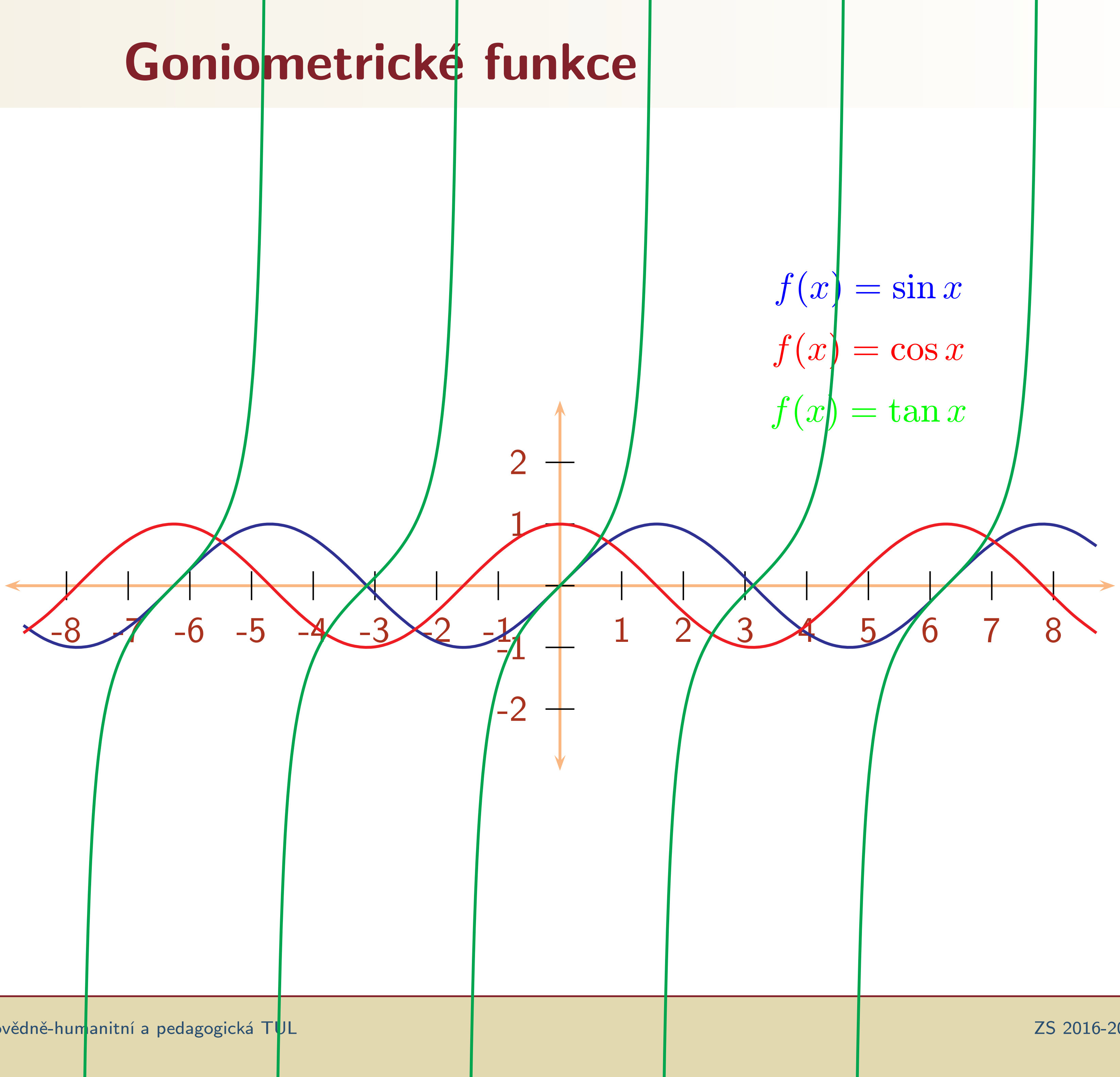
Goniometrické funkce



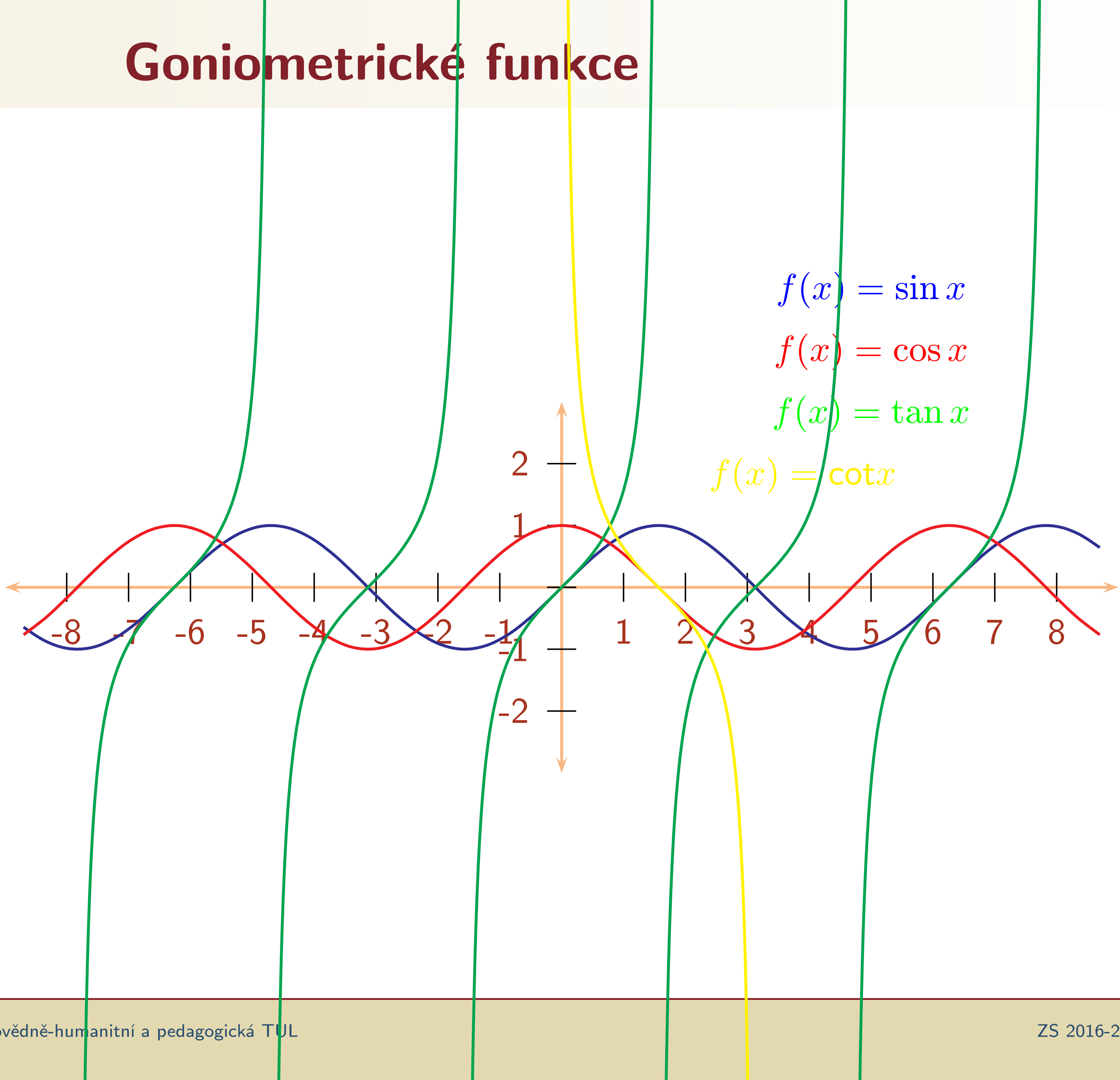
Goniometrické funkce



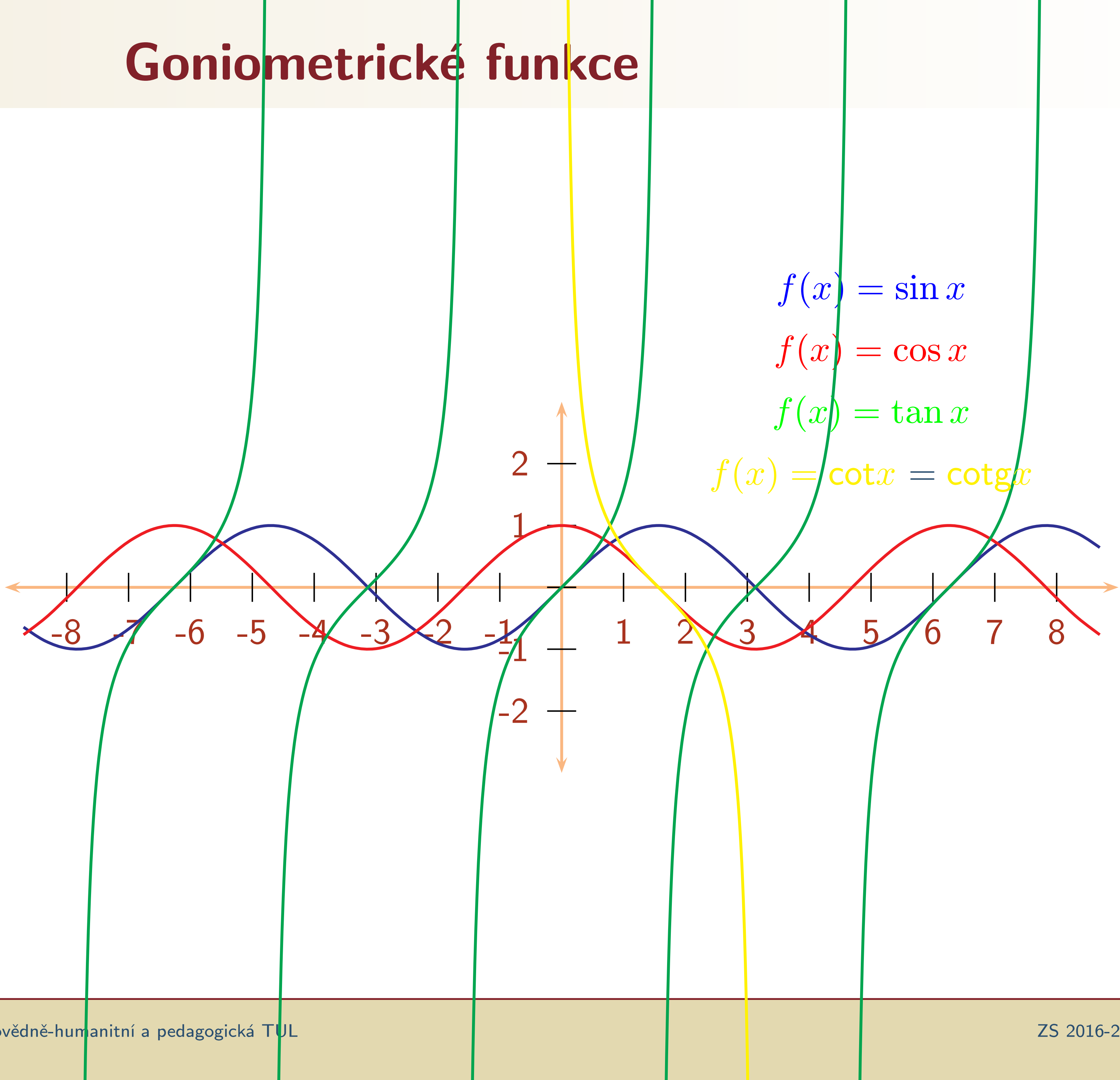
Goniometrické funkce



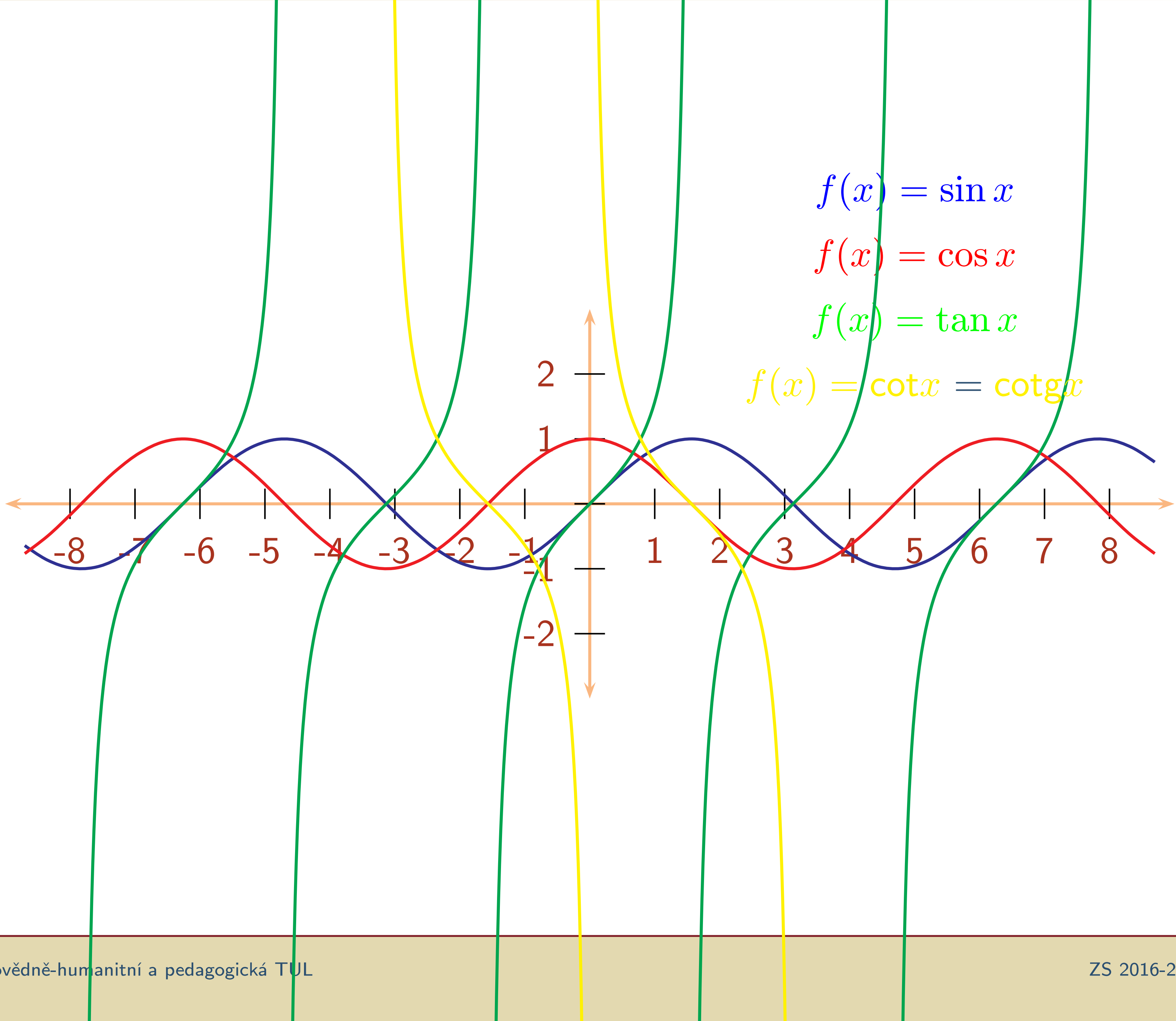
Goniometrické funkce



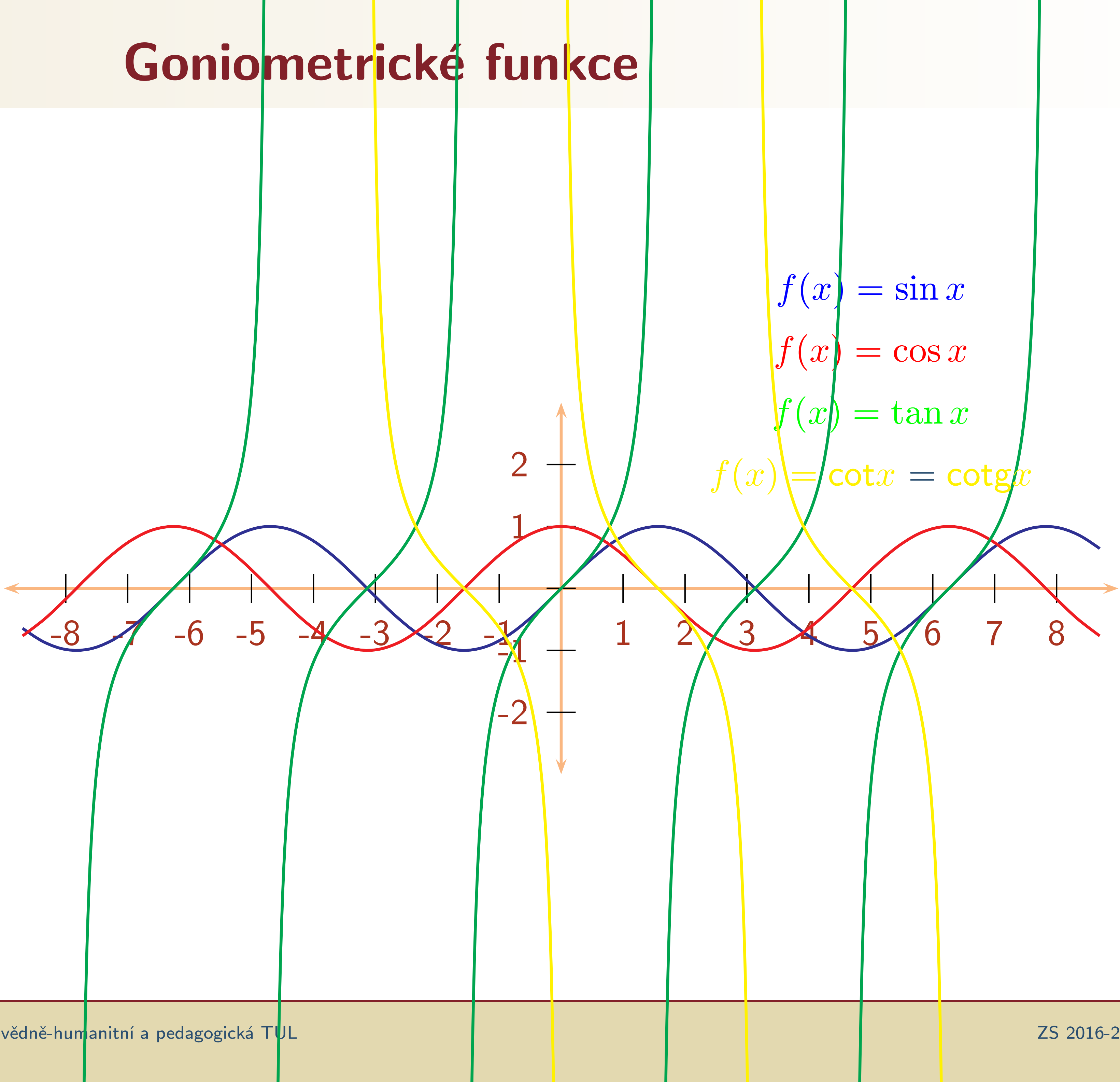
Goniometrické funkce



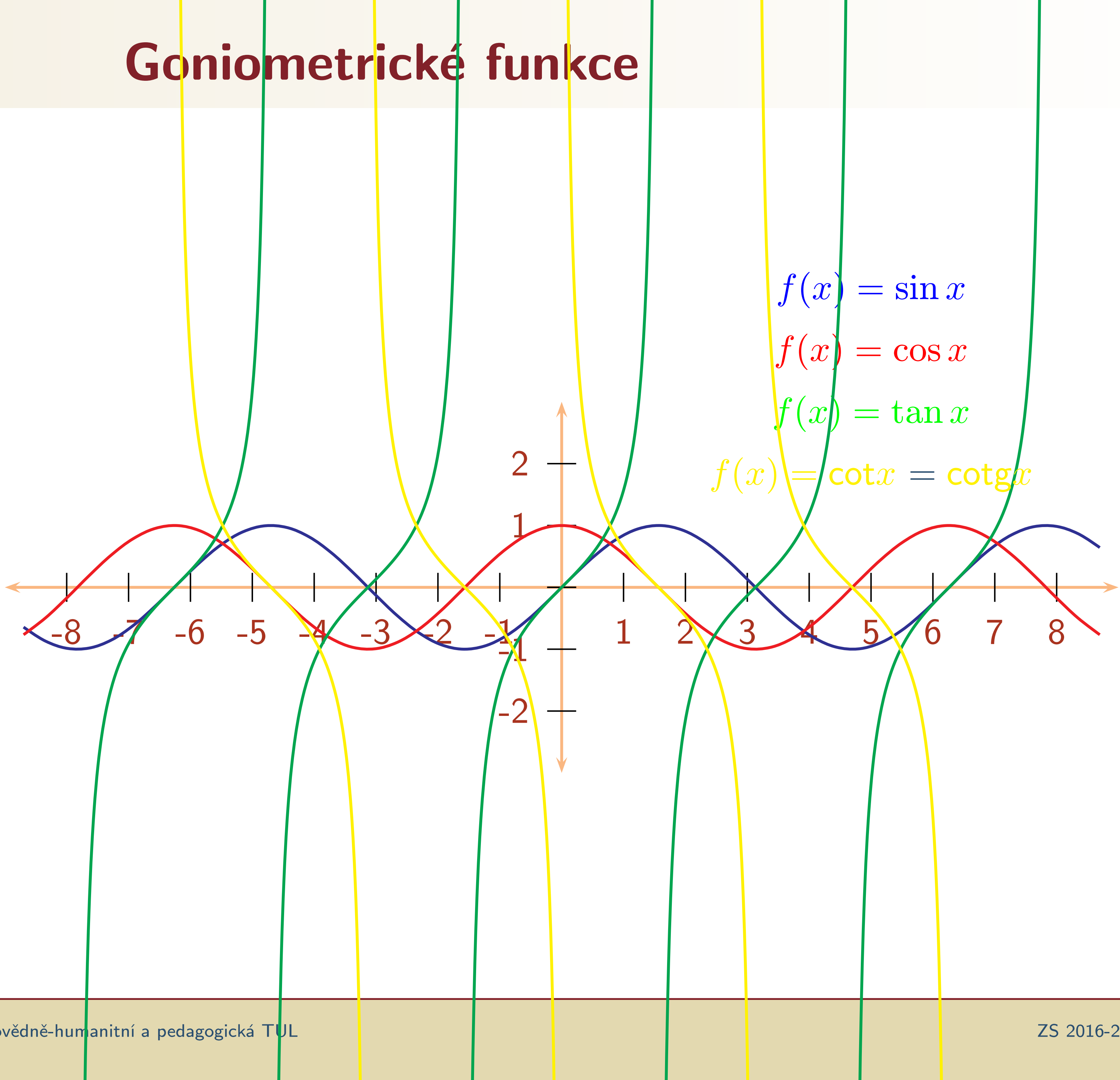
Goniometrické funkce



Goniometrické funkce



Goniometrické funkce



Goniometrické funkce

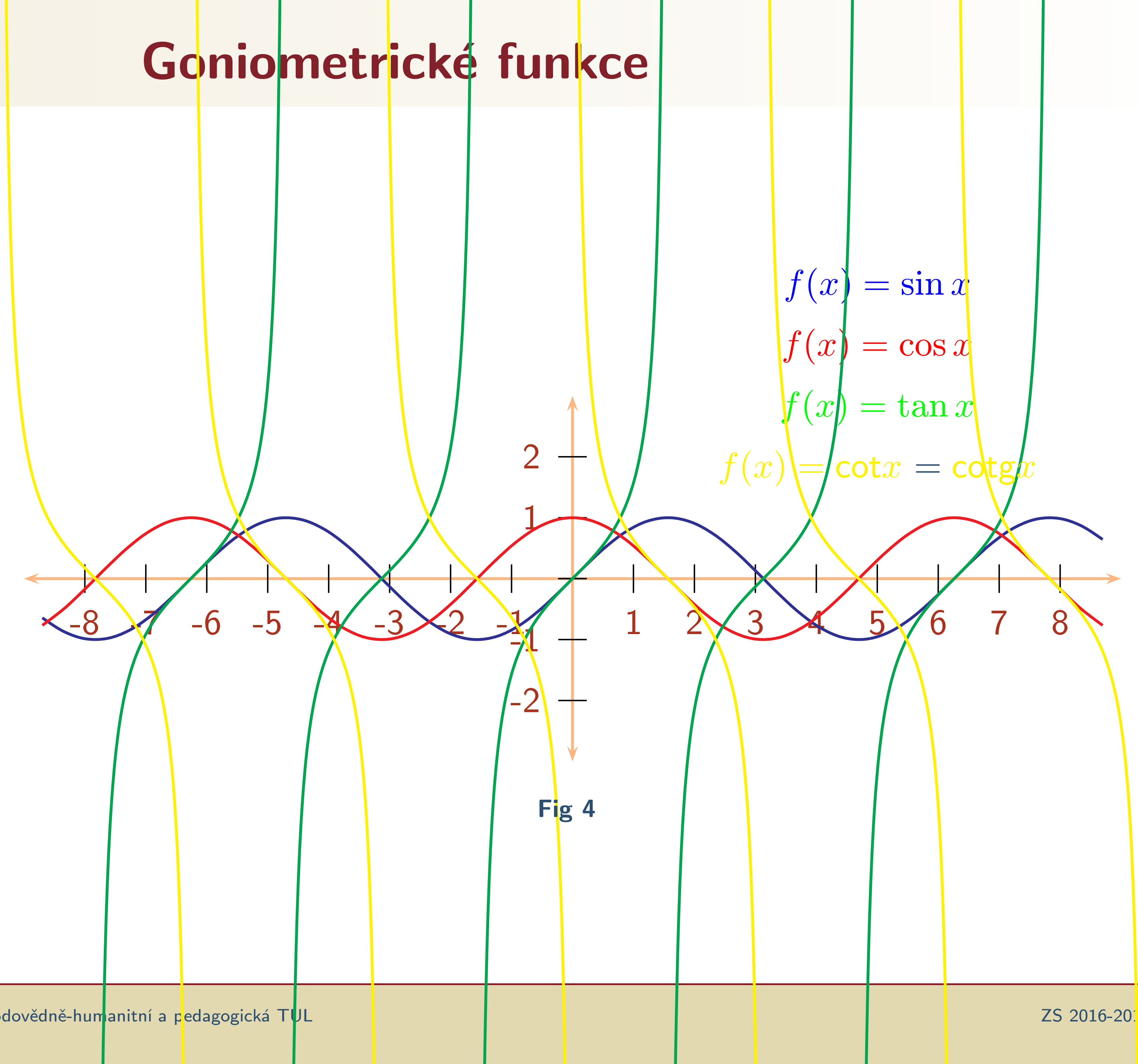


Fig 4

Funkce

Definice Kompozice funkcí
Nechť $g : A \to B,\ f : B \to C$ jsou dvě funkce.
Pak **kompozicí funkcí f a g** rozumíme funkci $h : A \to C$, definovanou předpisem

$$h(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in A\ .$$

značíme $h = f \circ g$ (je složena z funkcí f a g)
Funkci f nazveme vnější, funkci g vnitřní.

Poznámka
Definiční obor f = koobor g.

Definice
Nechť $f : A \to B$ je libovolná funkce. Říkáme, že funkce $g : B \to A$ **je inverzní funkce k f**, jestliže platí
1) $g \circ f = \mathrm{id}_A$
2) $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
Značíme $g = f^{-1}$

Funkce

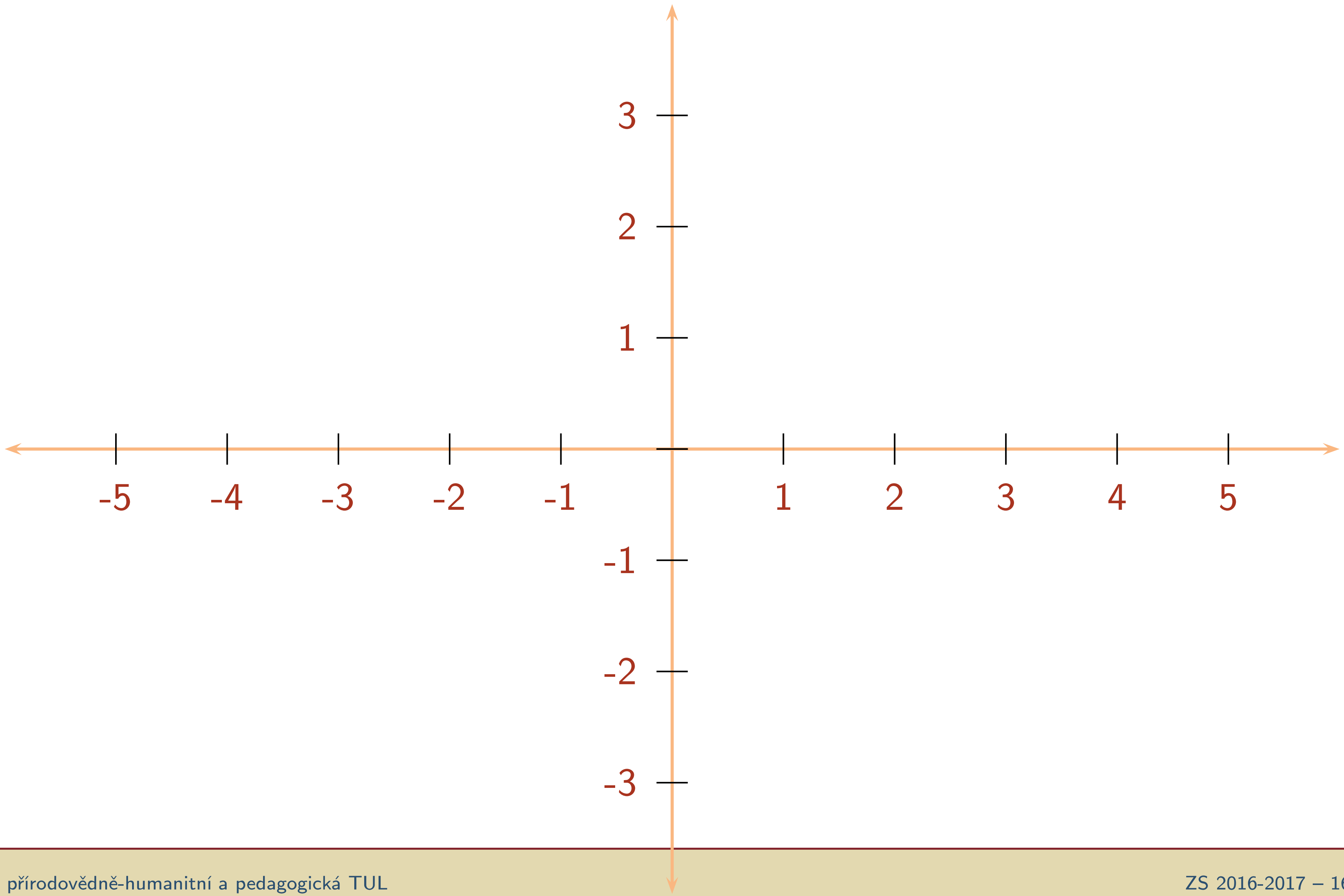
Poznámka
Definice je symetrická (je-li f inverzní ke $g \implies$ je g inverzní k f).
Mluvíme o vzájemně inverzních funkcích.

Věta
Jestliže existuje f^{-1}, pak platí $f(f^{-1})^{-1} = f$.

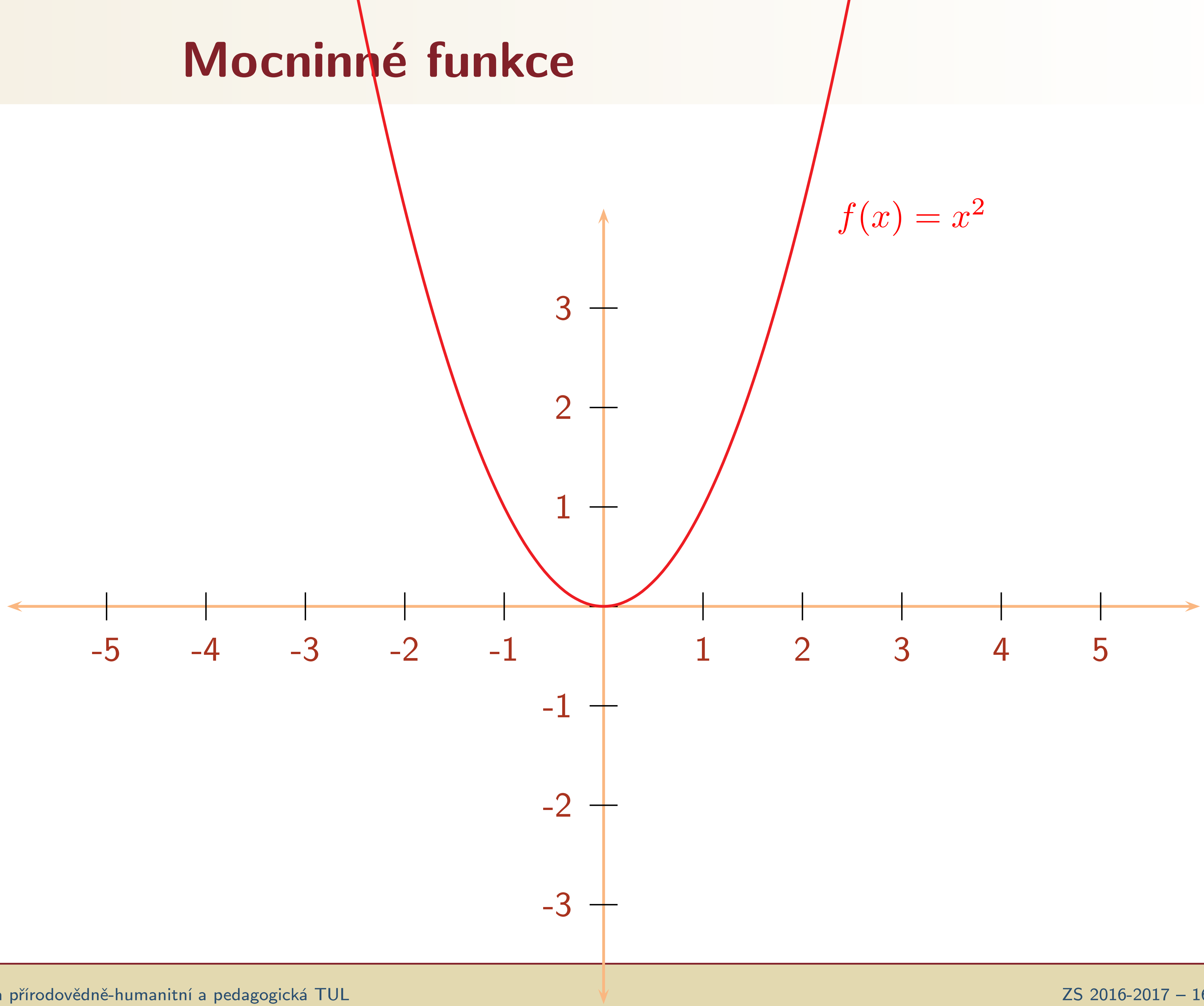
Věta (o jednoznačnosti inverzní funkce)
Jestliže k funkci $f : A \to B$ existuje inverzní funkce, pak je jediná.

Věta (o existenci inverzní funkce)
K funkci $f : A \to B$ existuje inverzní funkce právě tehdy, když f je prostá a zobrazuje A na B.

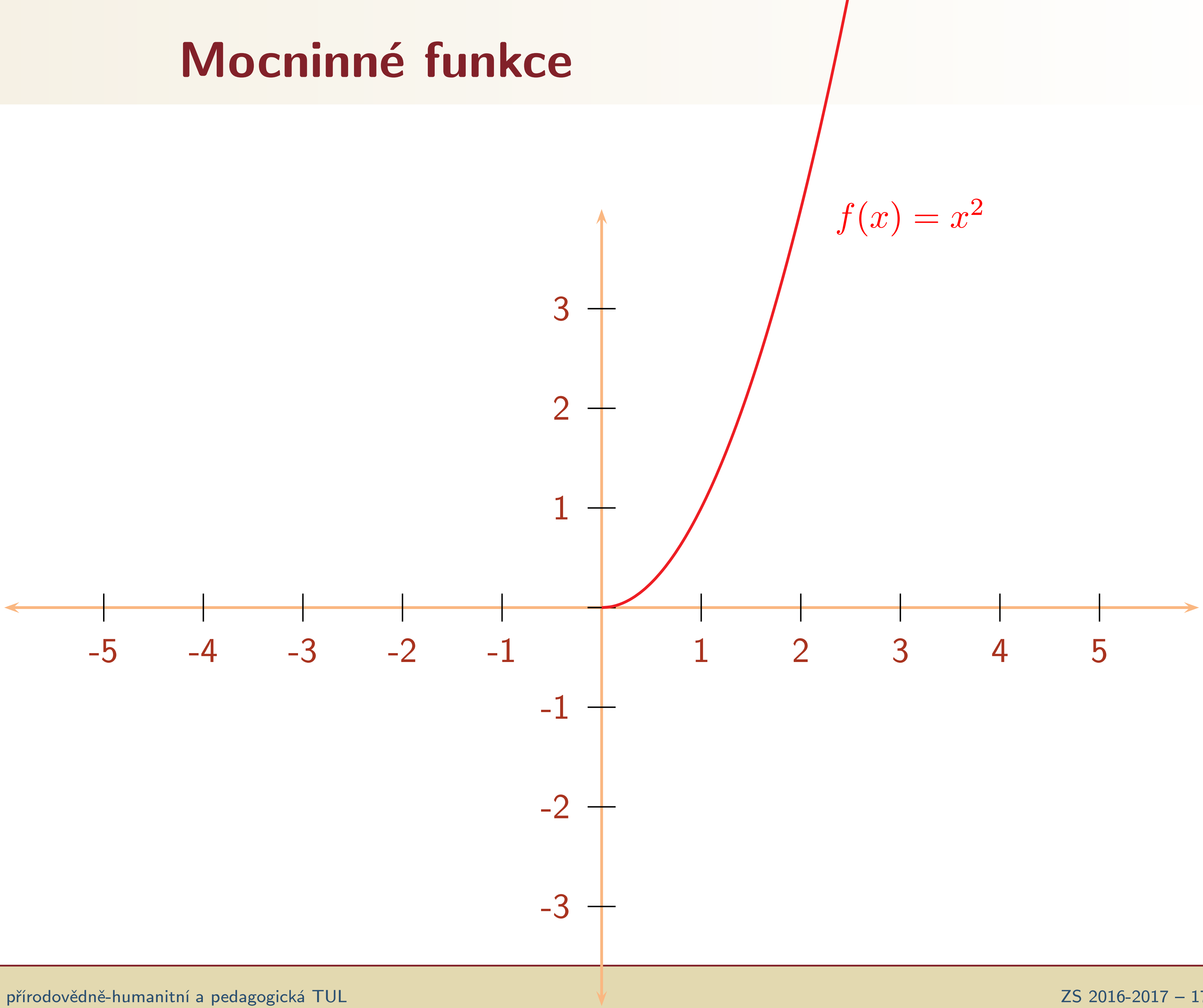
Mocninné funkce



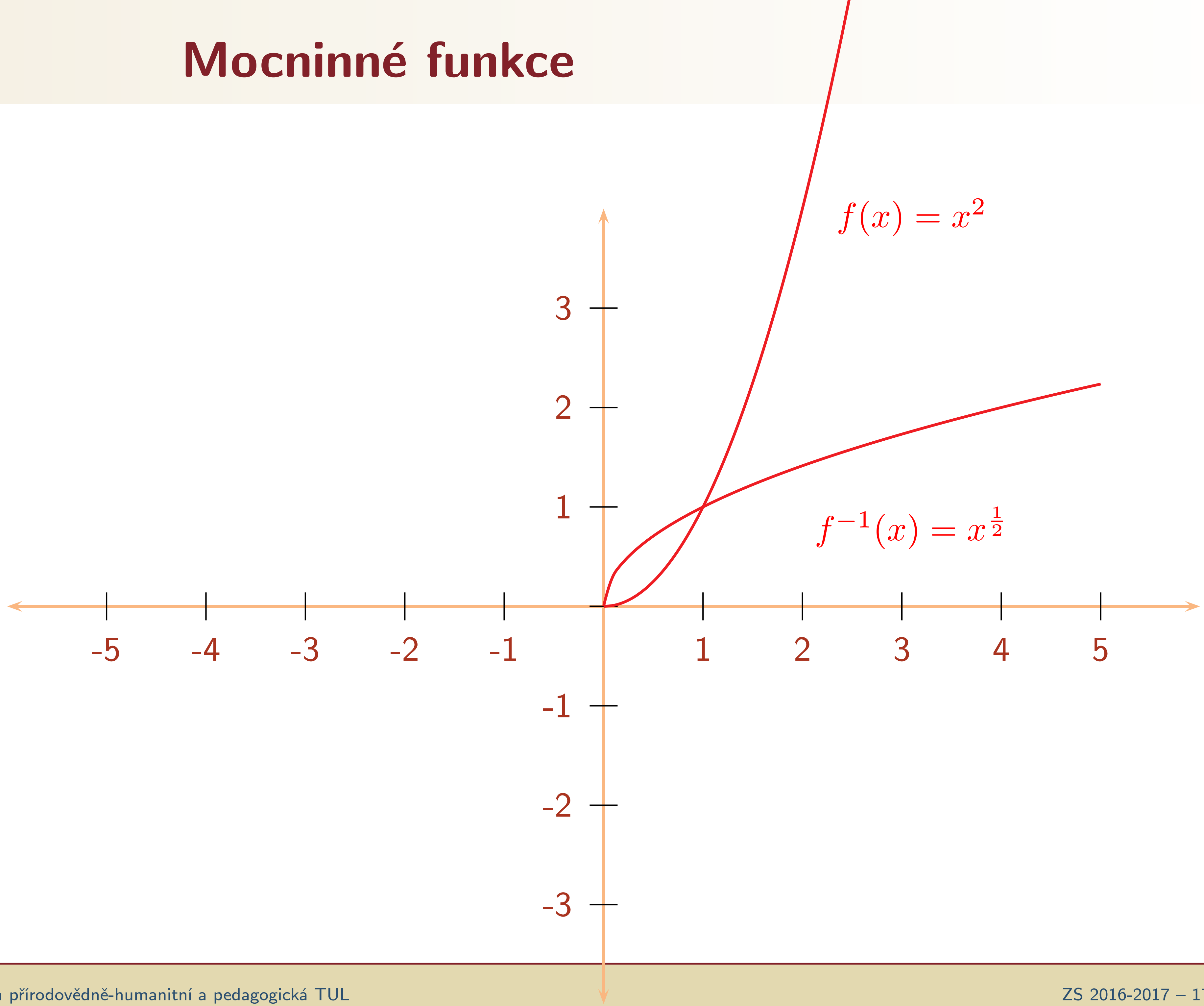
Mocninné funkce



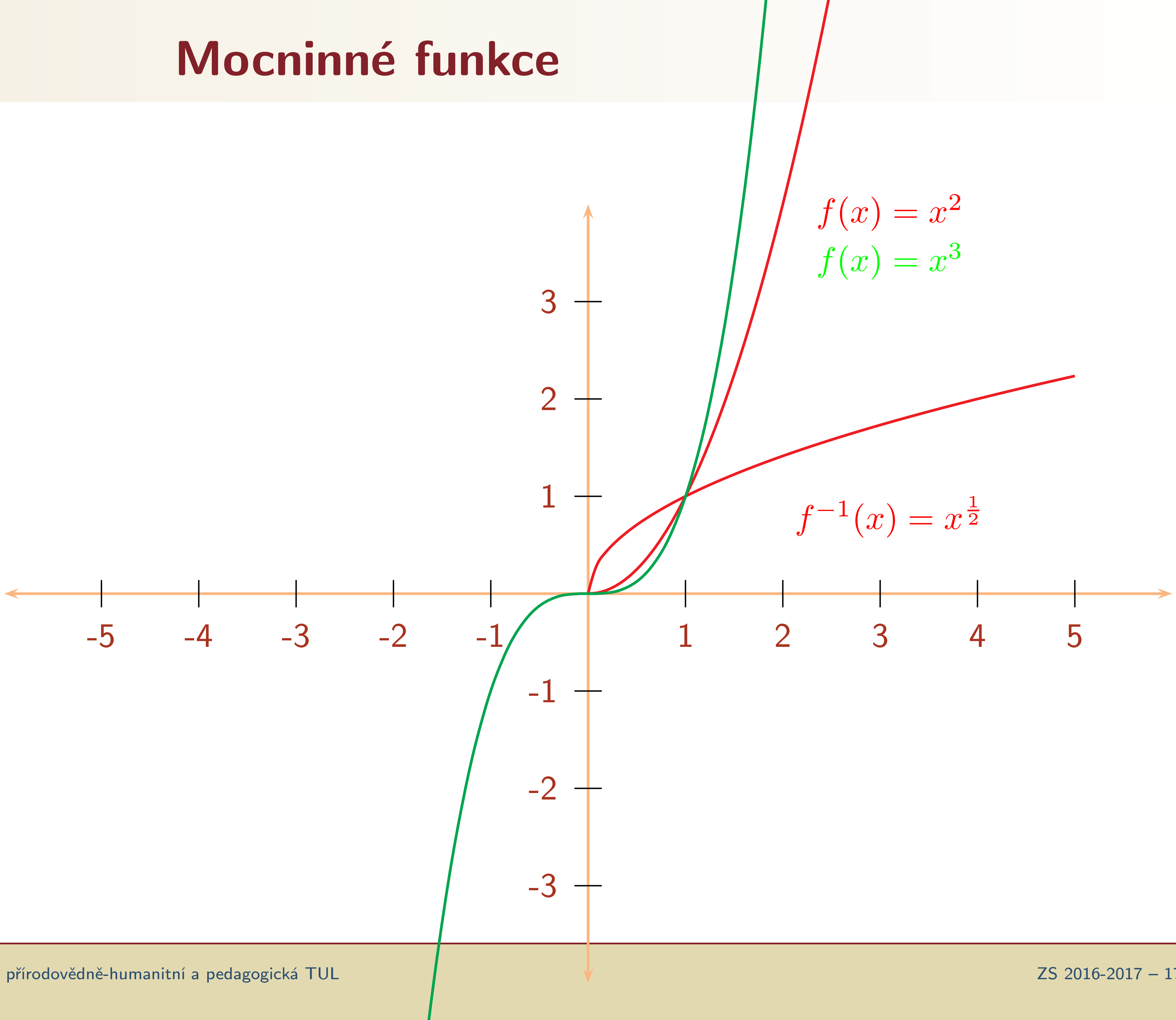
Mocninné funkce



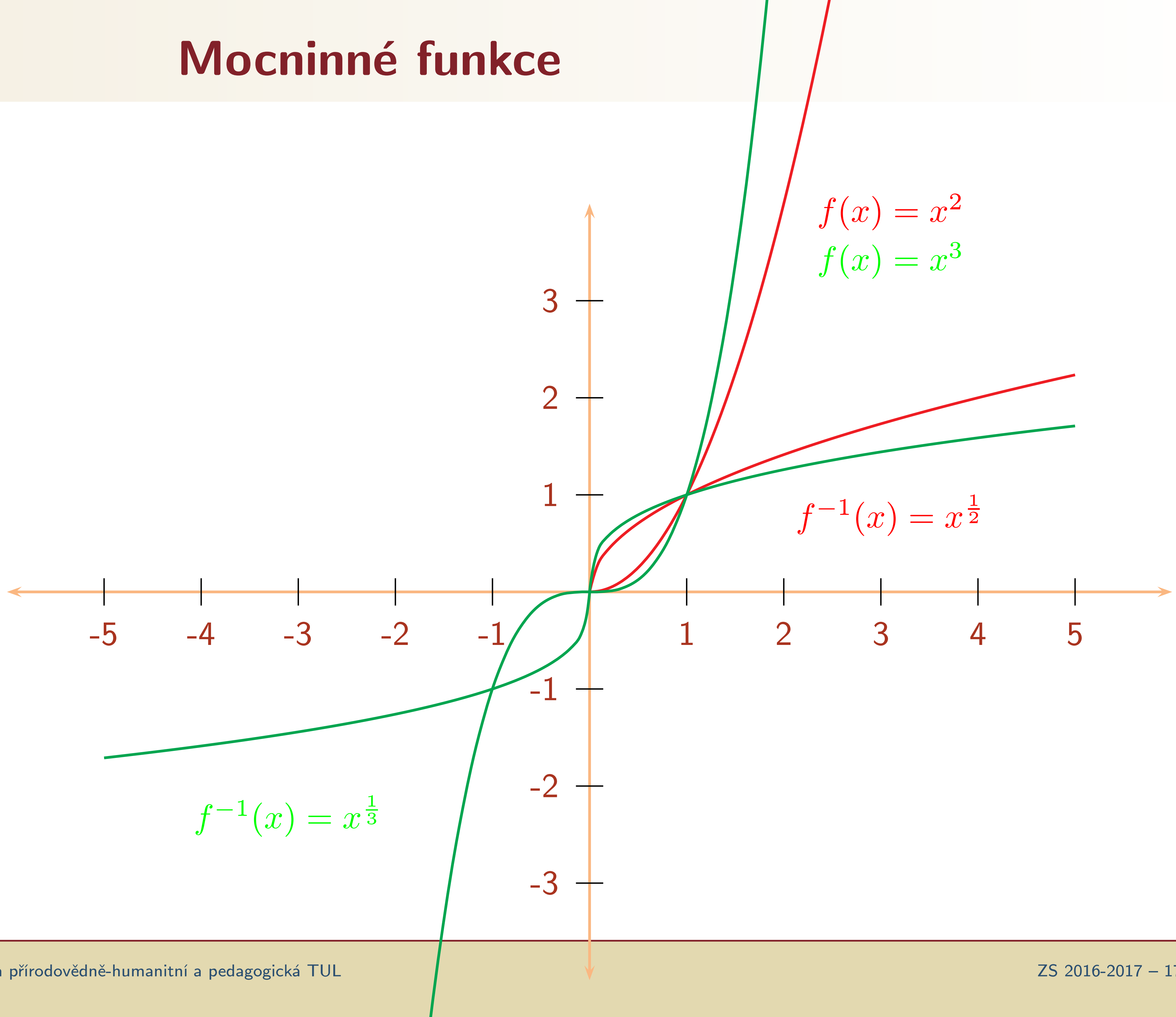
Mocninné funkce



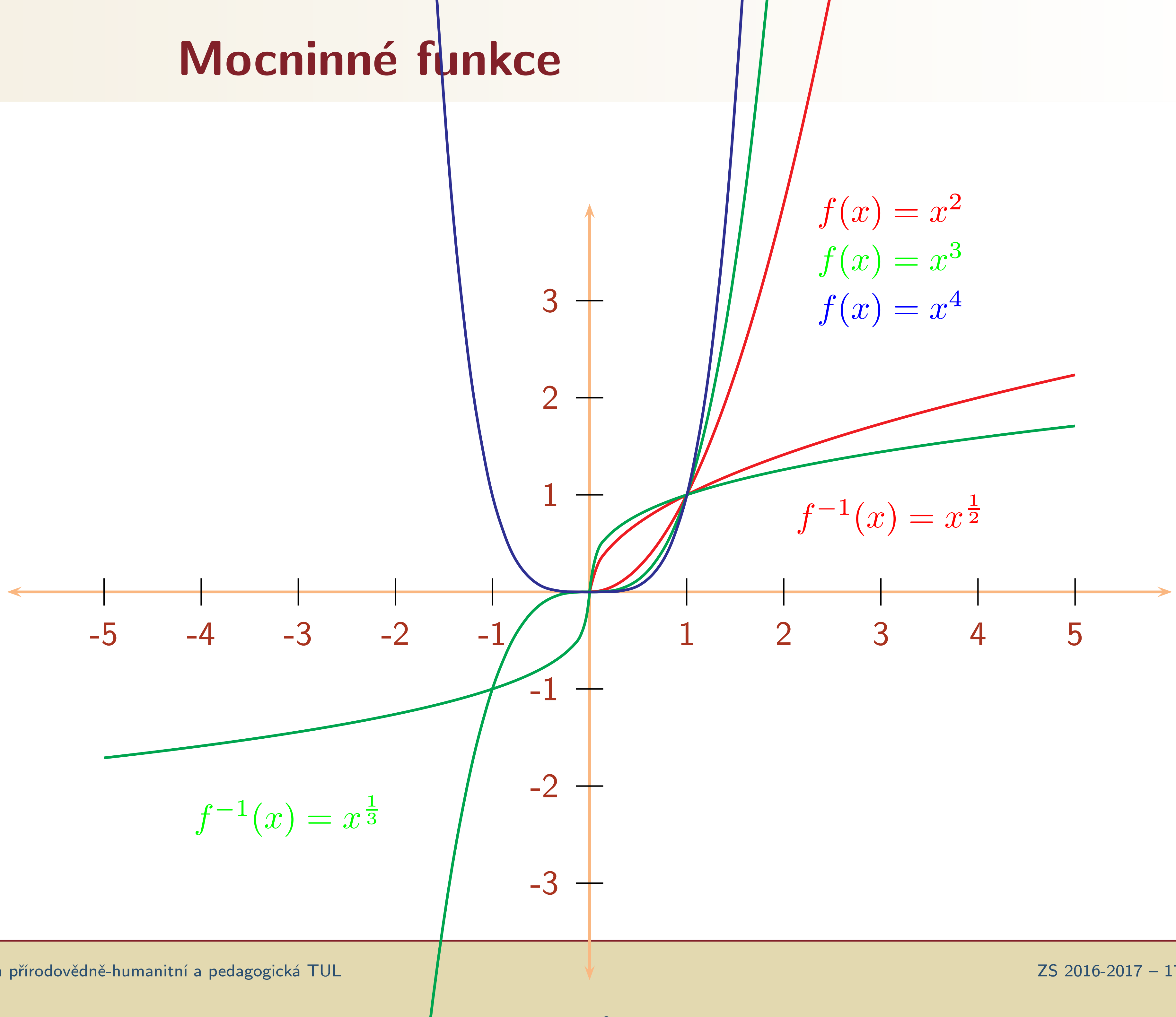
Mocninné funkce



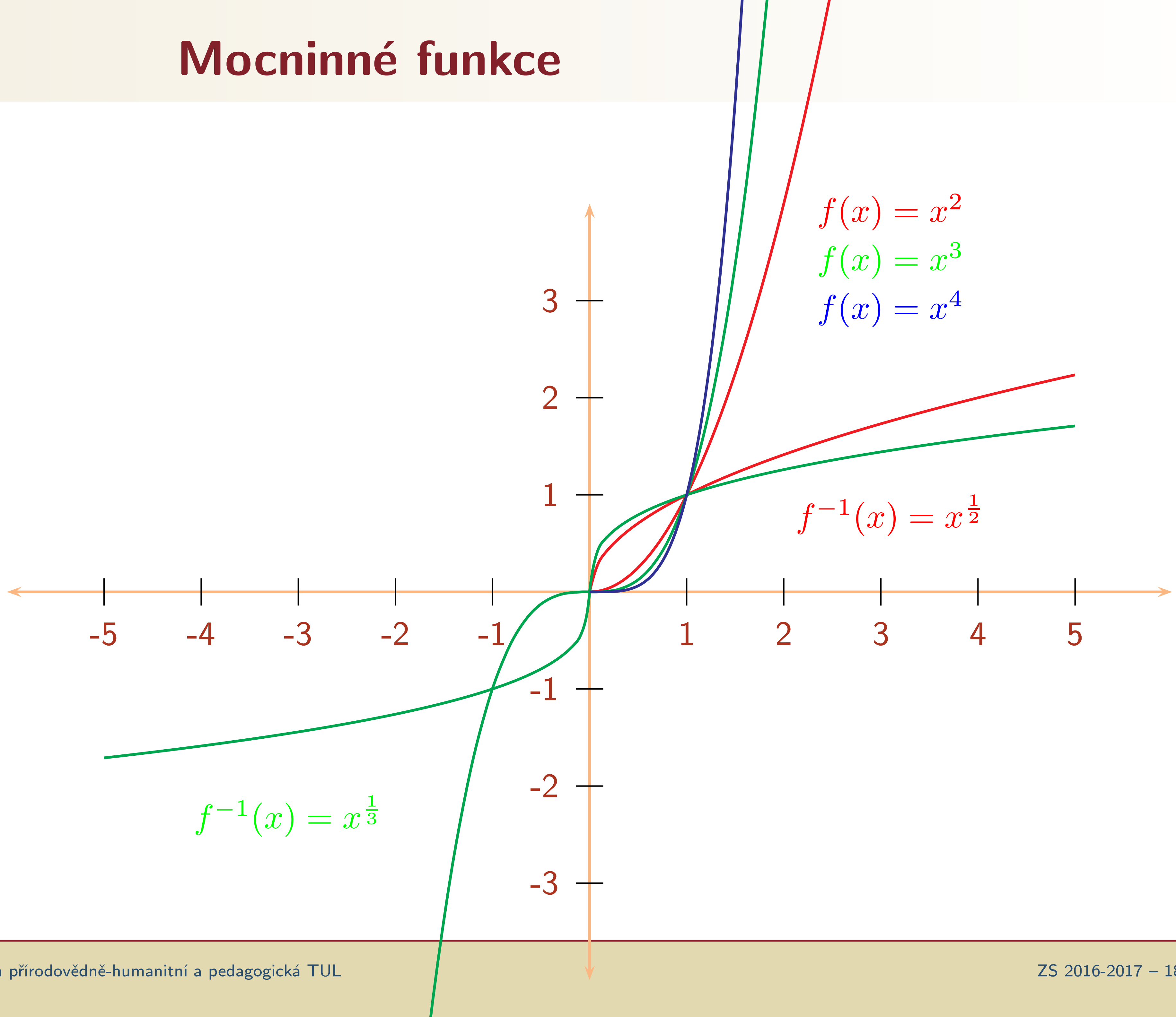
Mocninné funkce



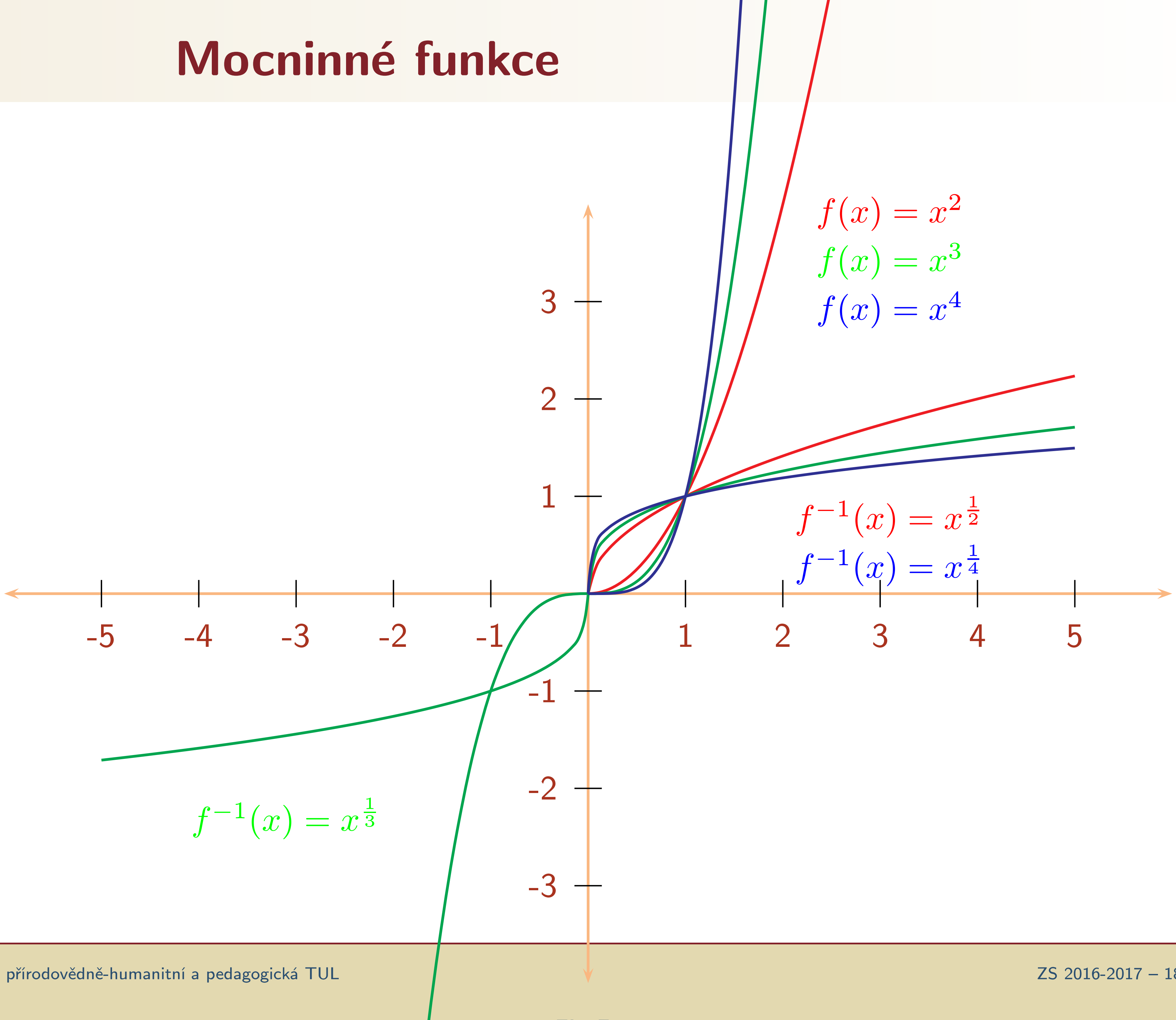
Mocninné funkce



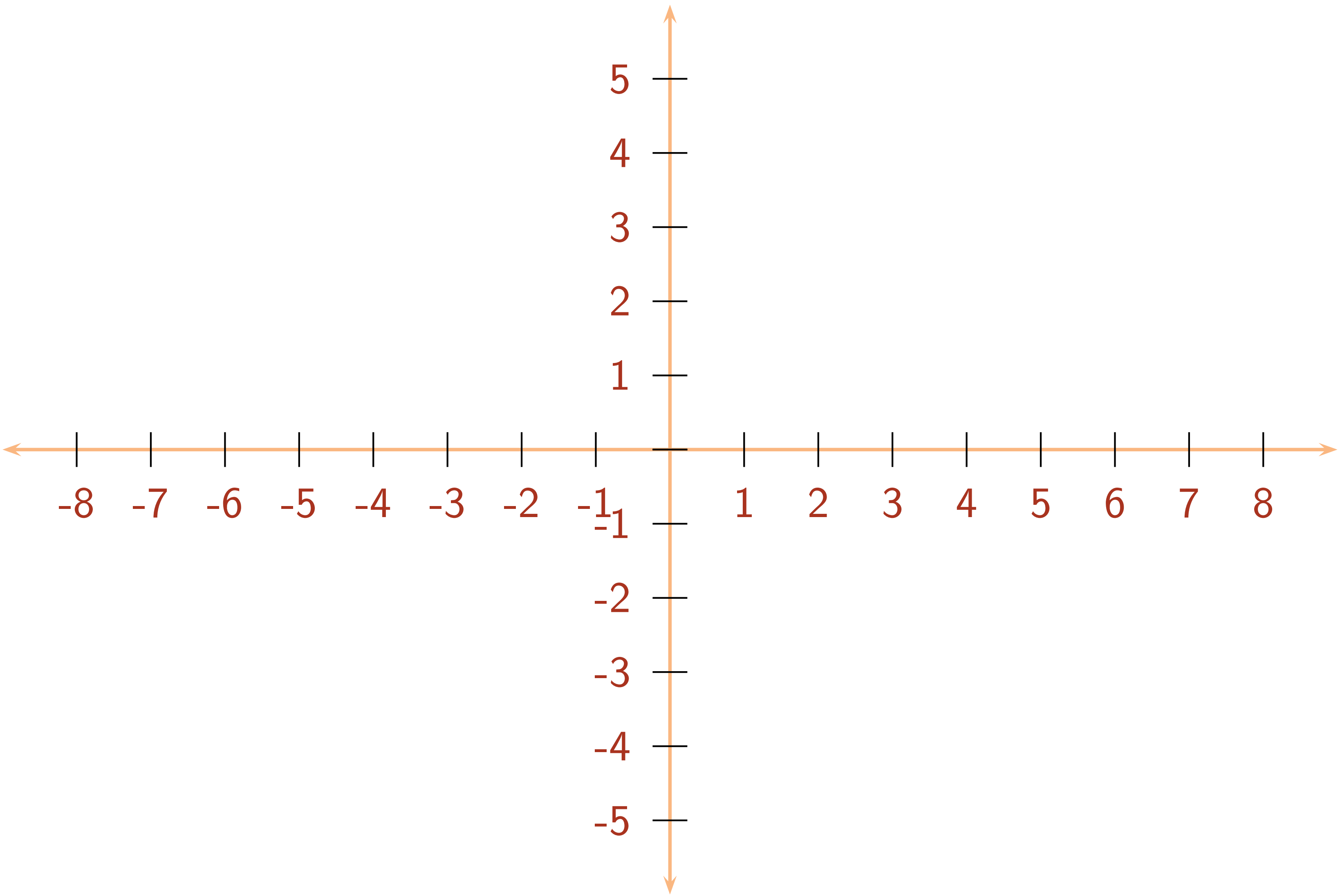
Mocninné funkce



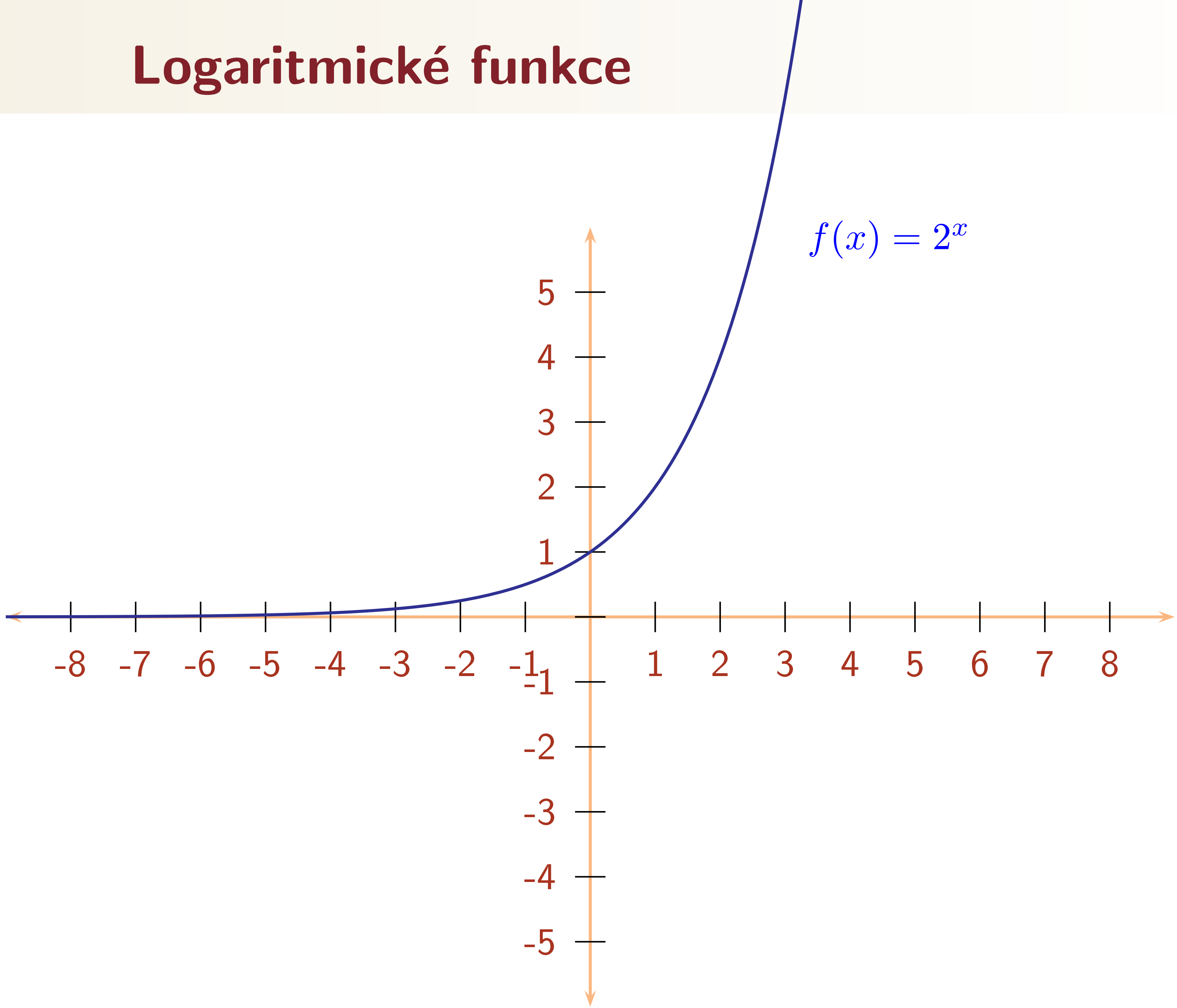
Mocninné funkce



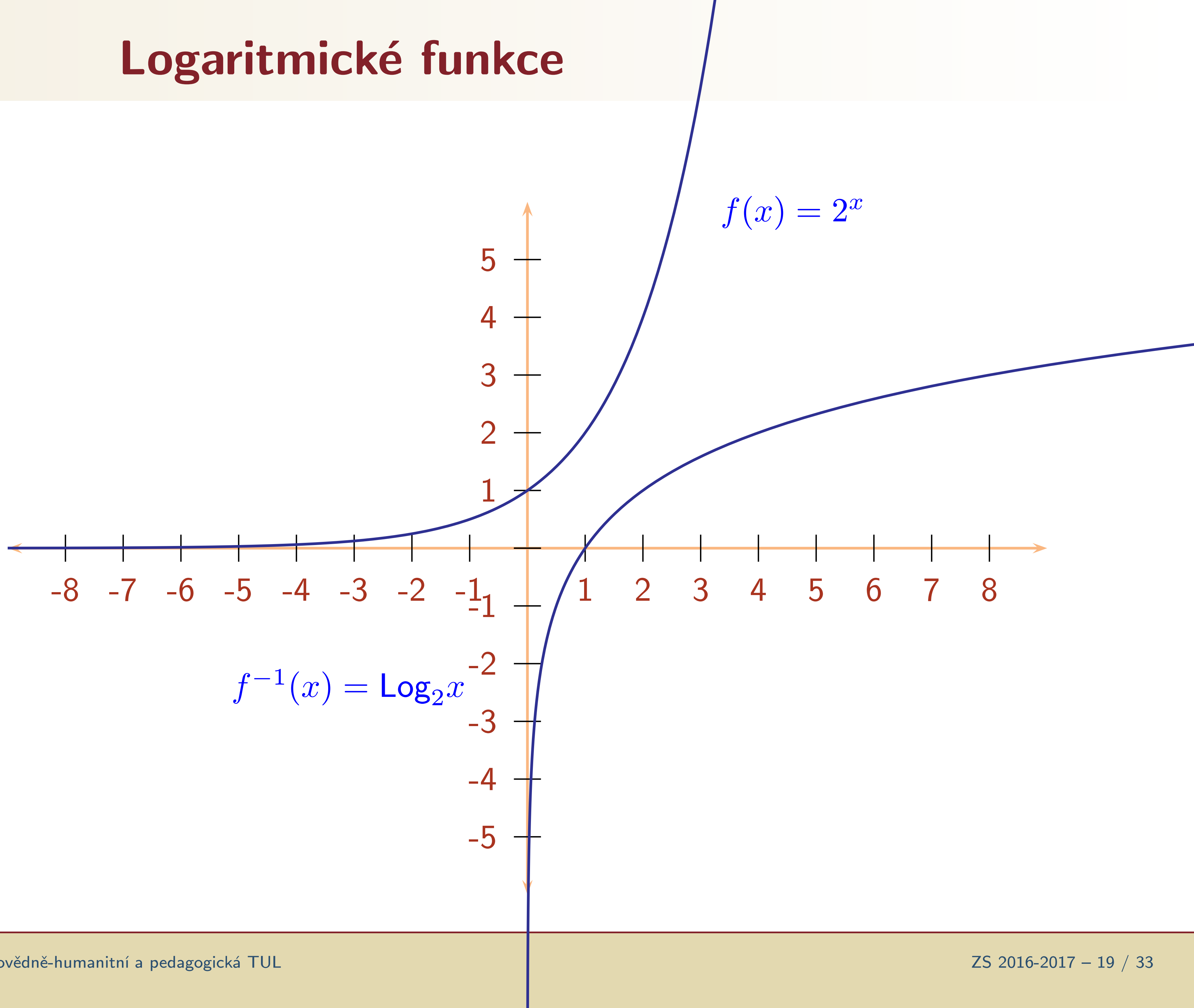
Logaritmické funkce



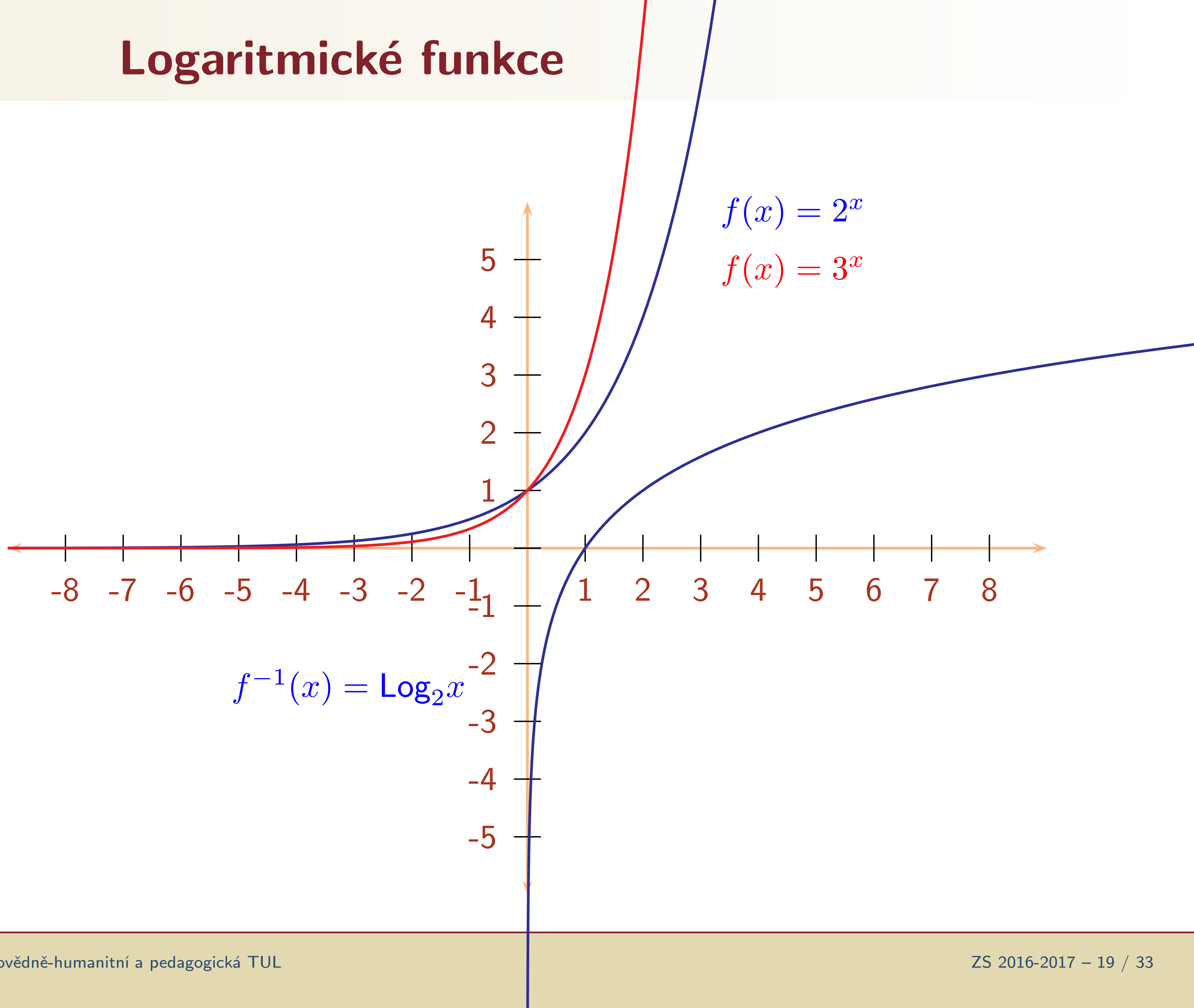
Logaritmické funkce



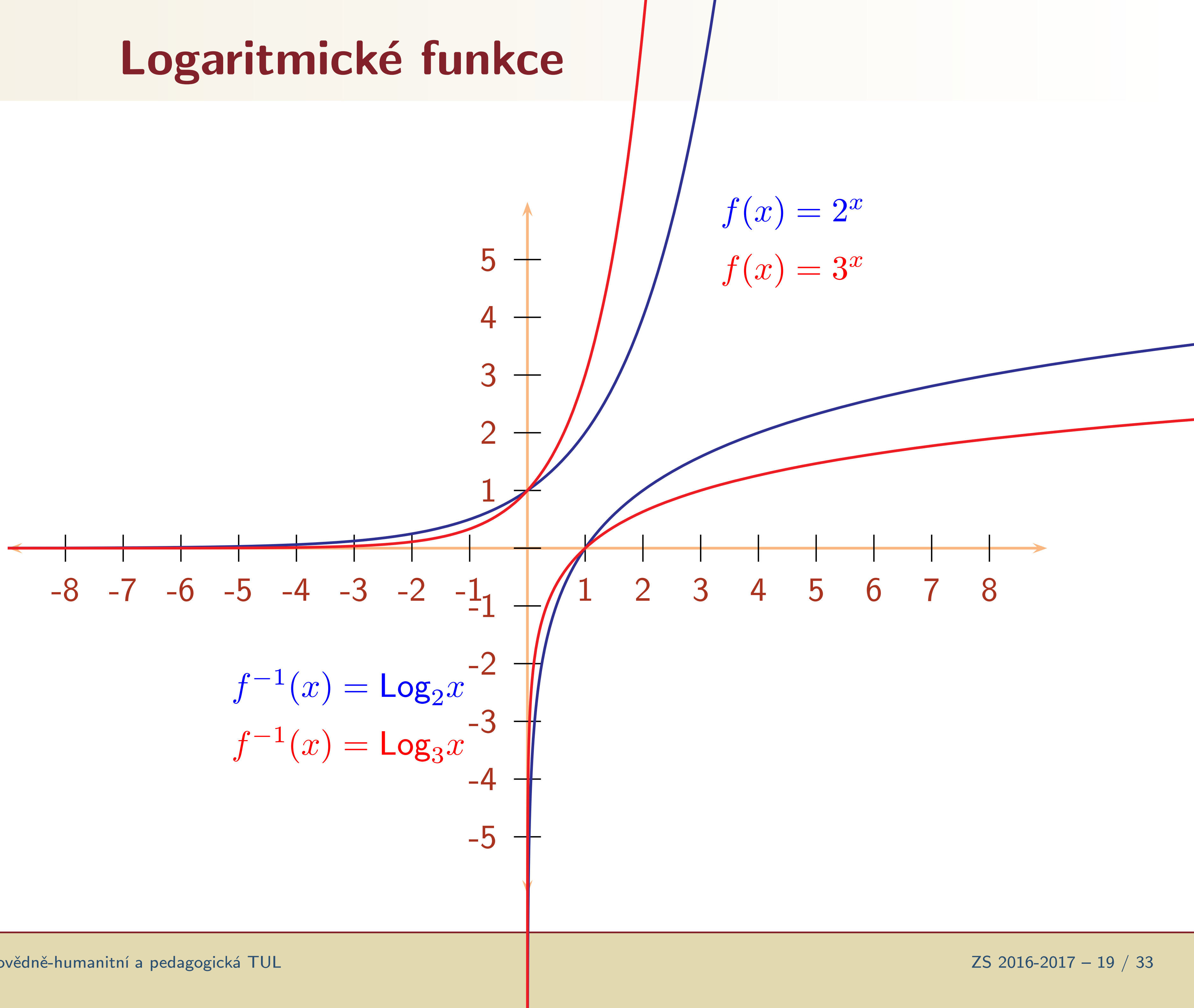
Logaritmické funkce



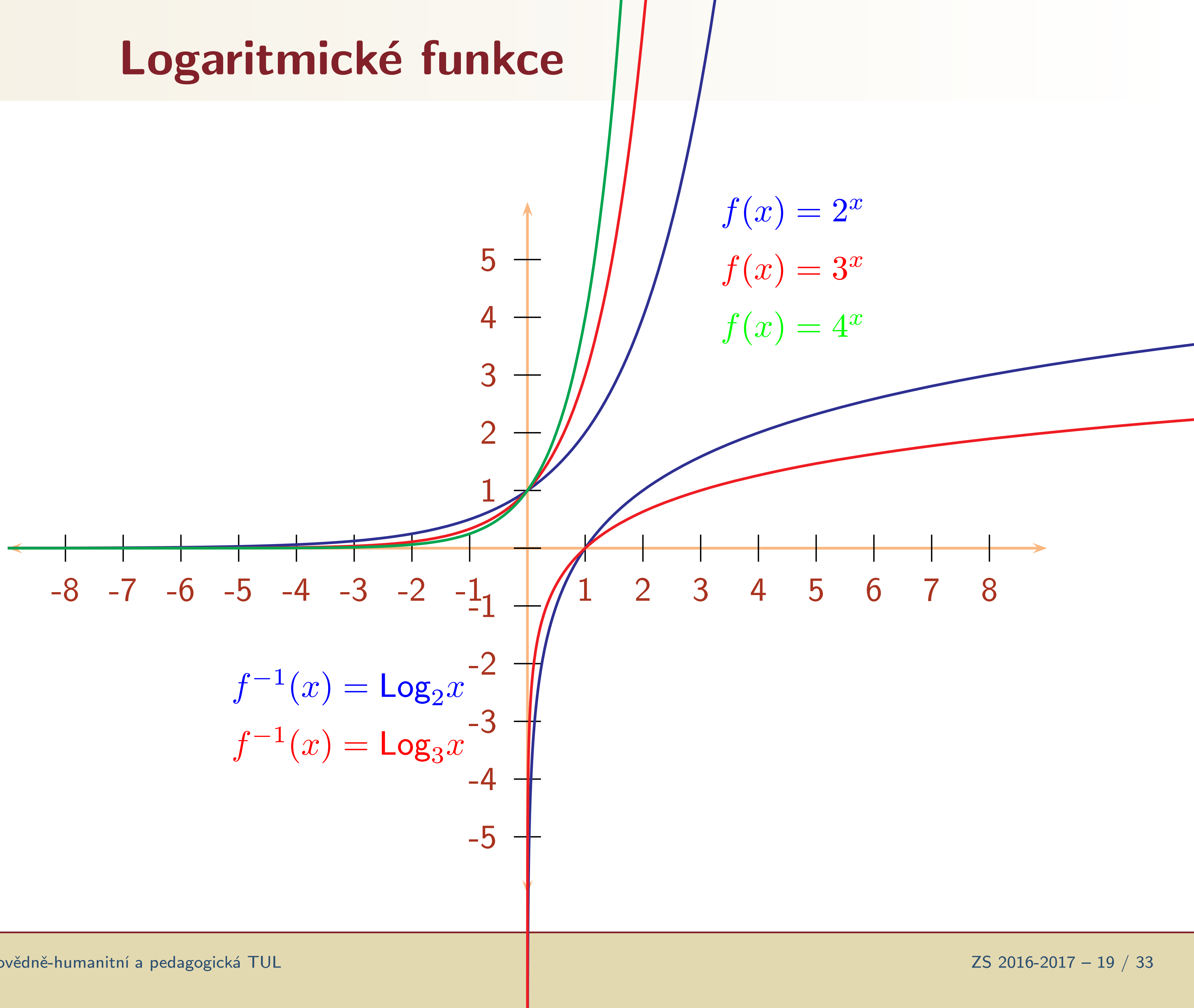
Logaritmické funkce



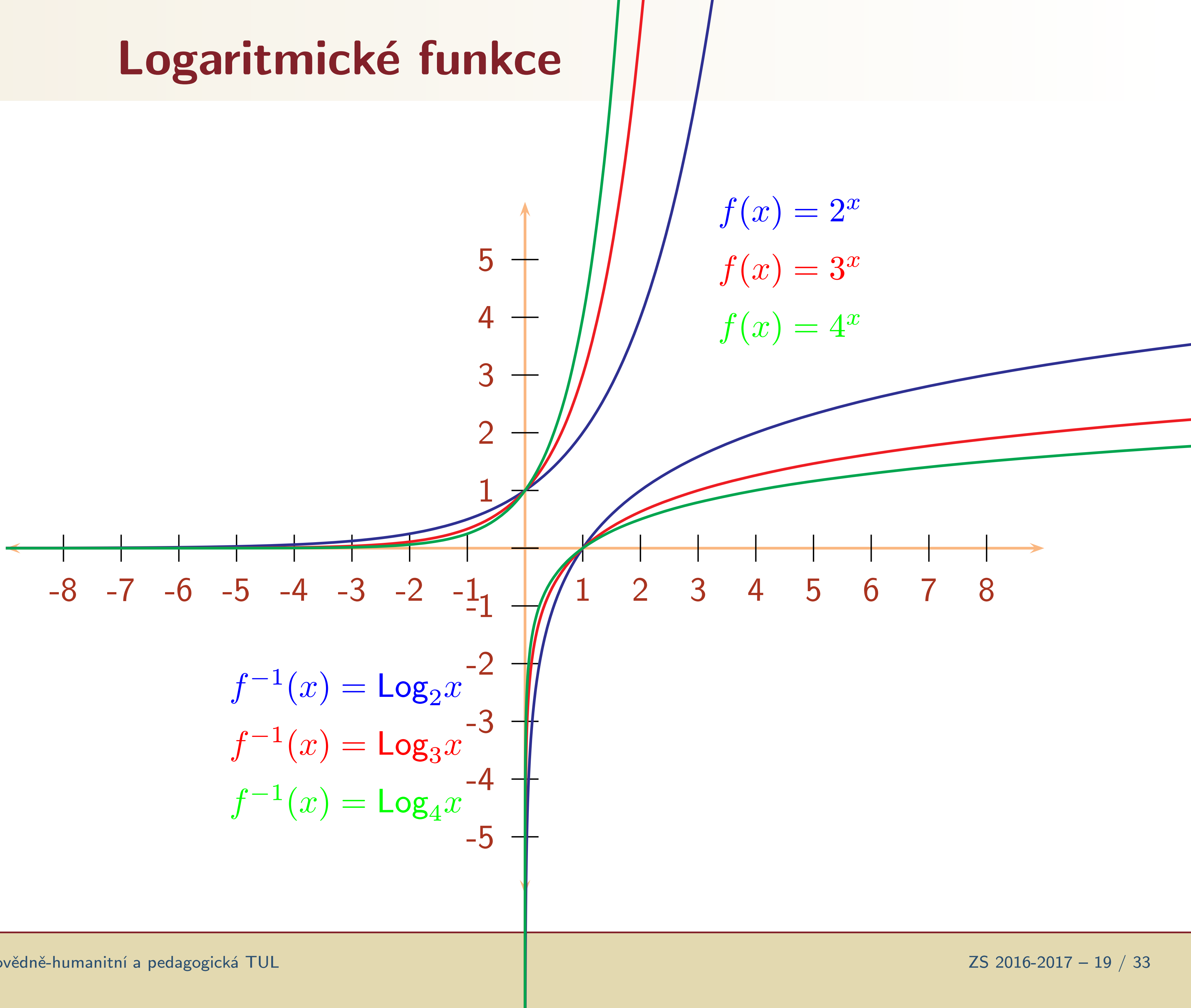
Logaritmické funkce



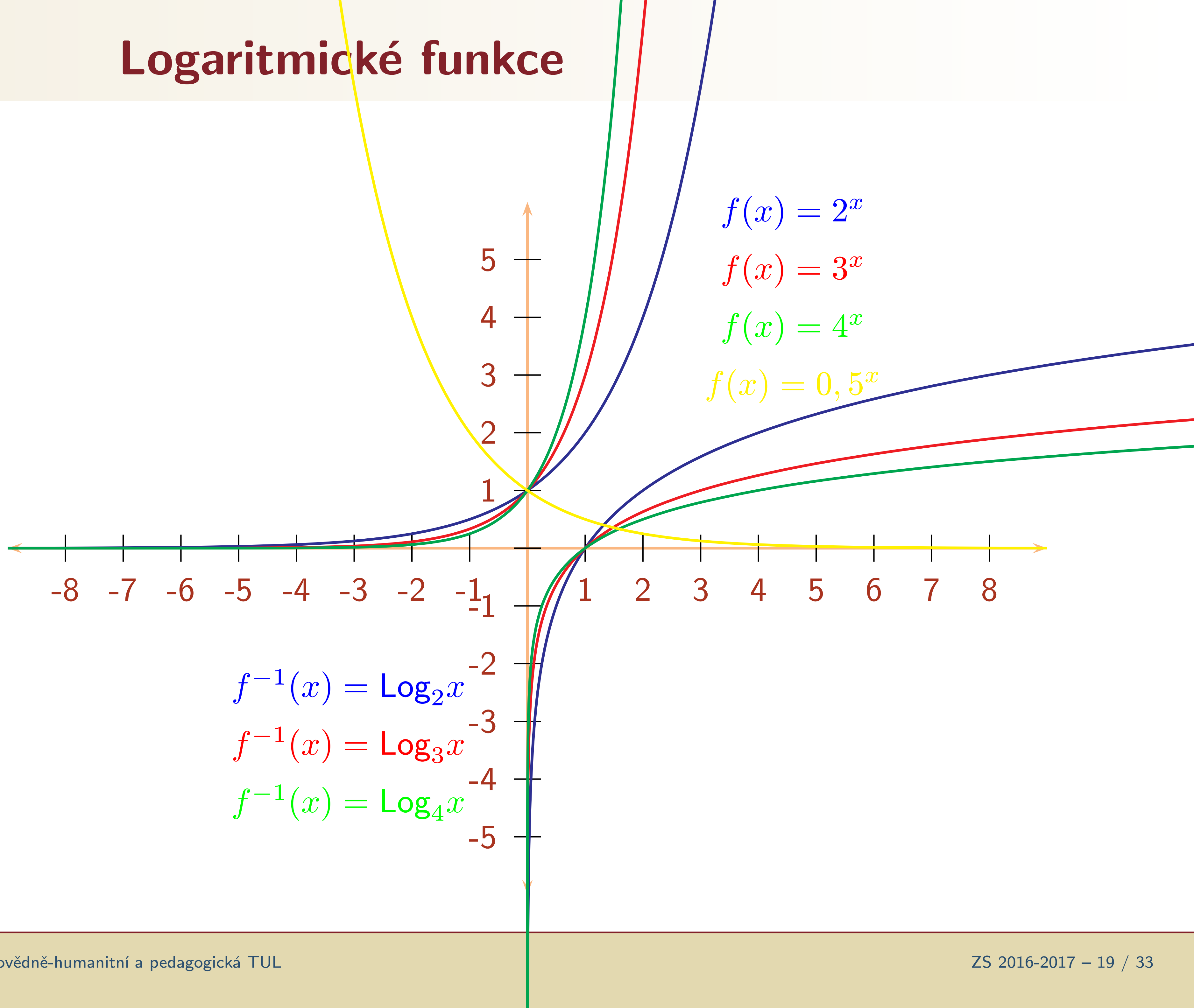
Logaritmické funkce



Logaritmické funkce



Logaritmické funkce



Logaritmické funkce

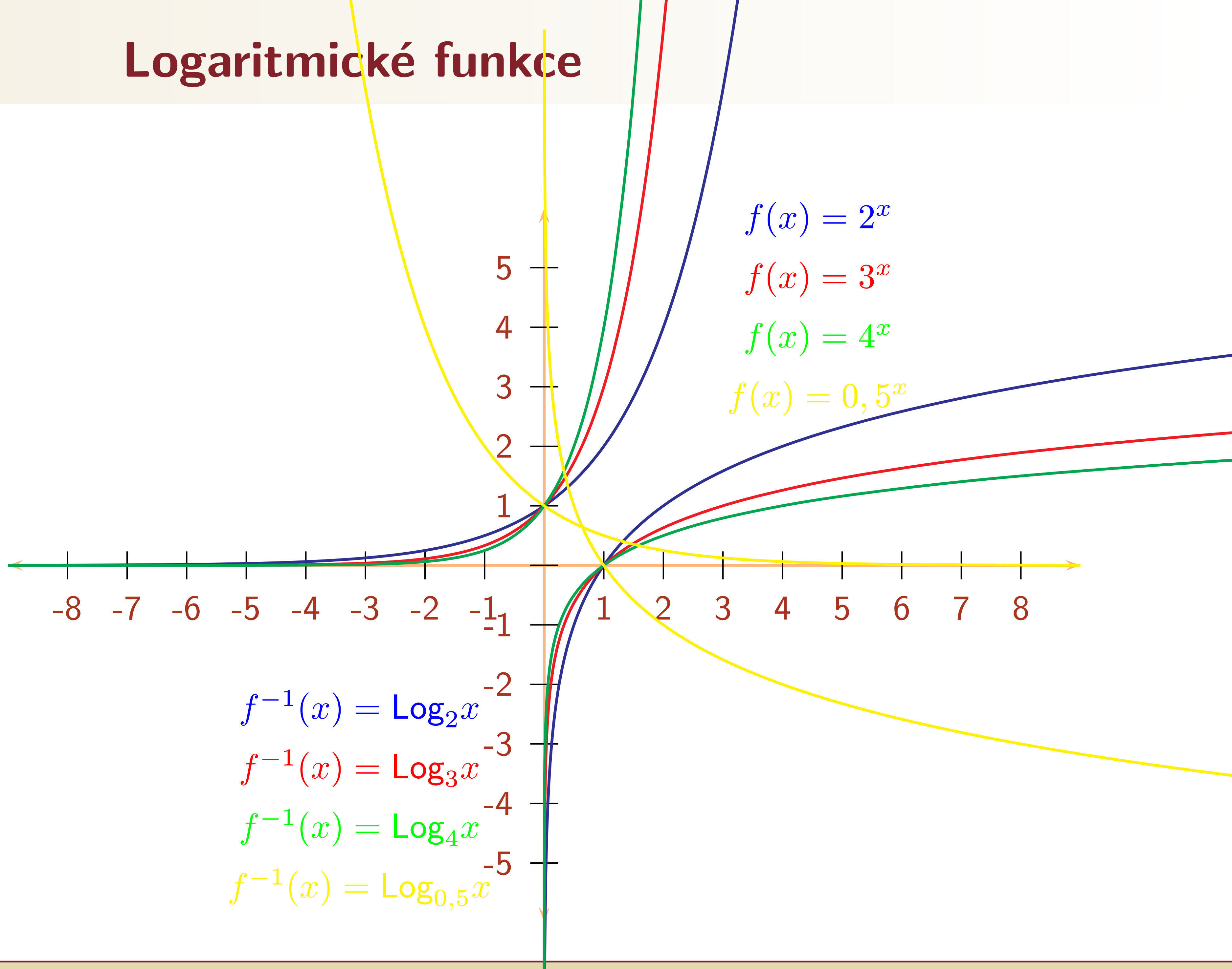
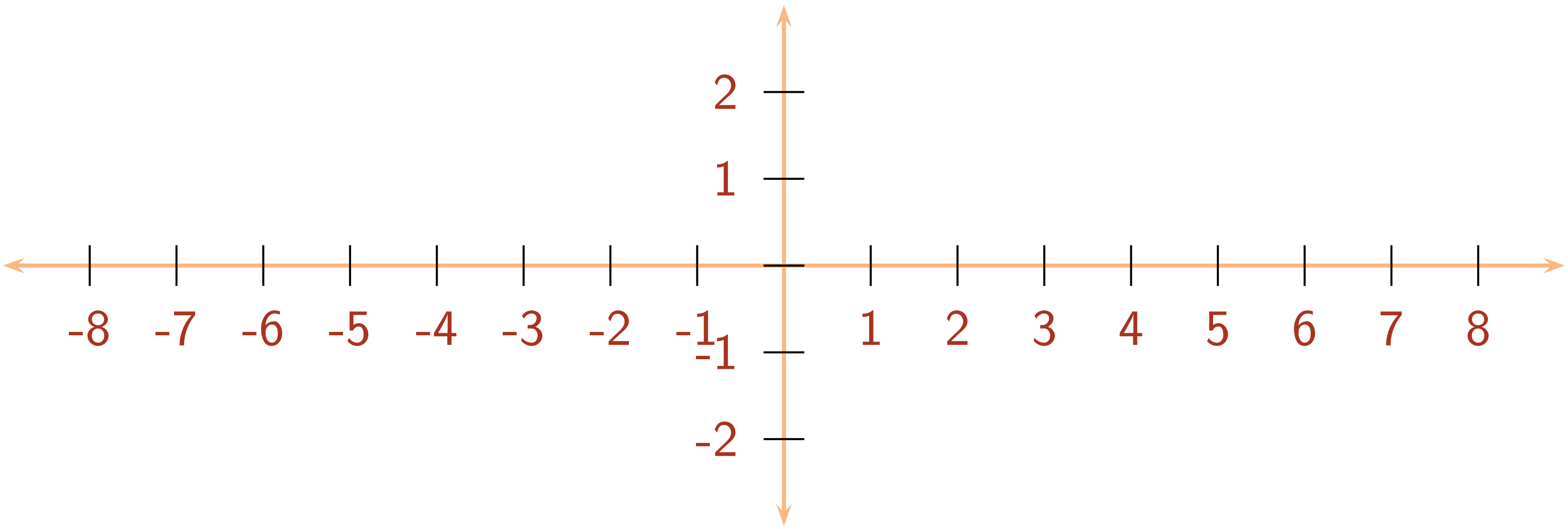


Fig 8

Cyklometrické funkce



Cyklometrické funkce

$f(x) = \sin x$

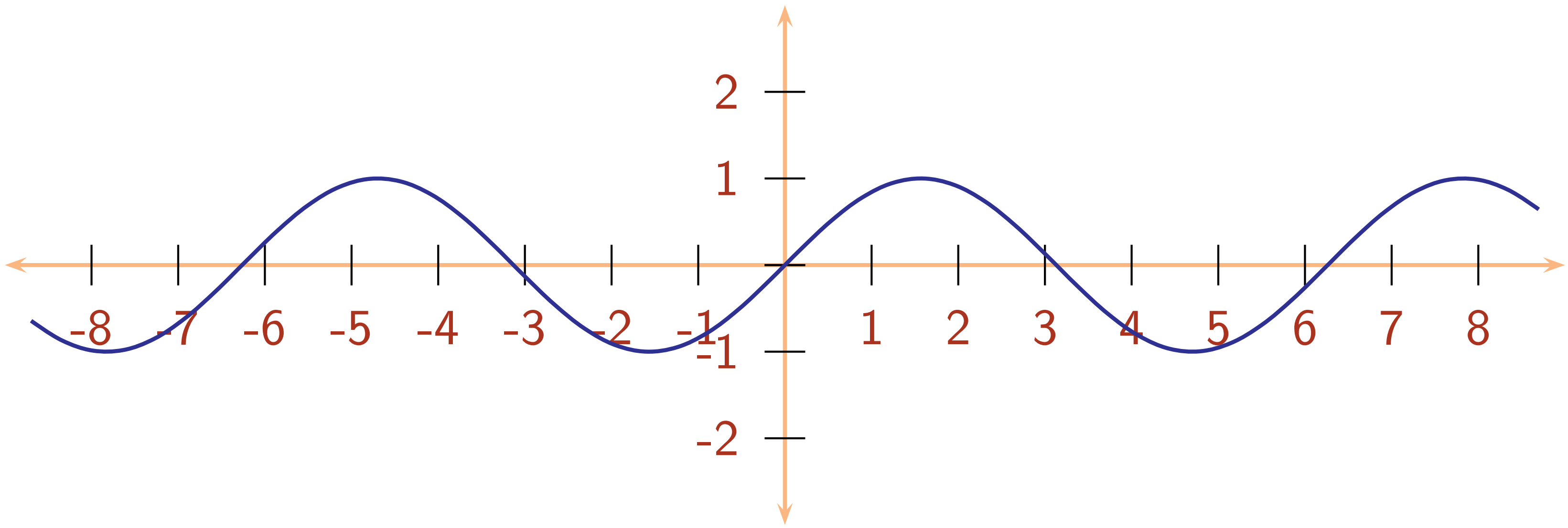
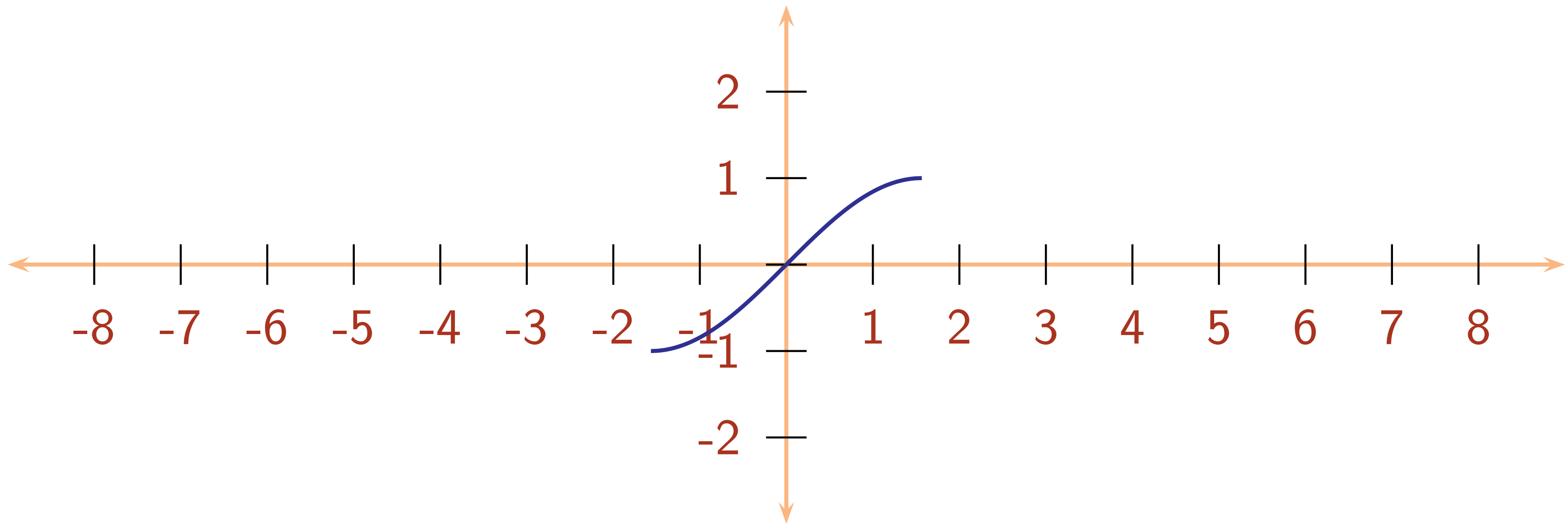


Fig 9

Cyklometrické funkce

$f(x) = \sin x$



Cyklometrické funkce

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{-1}(x) = \text{arcsin} x$$

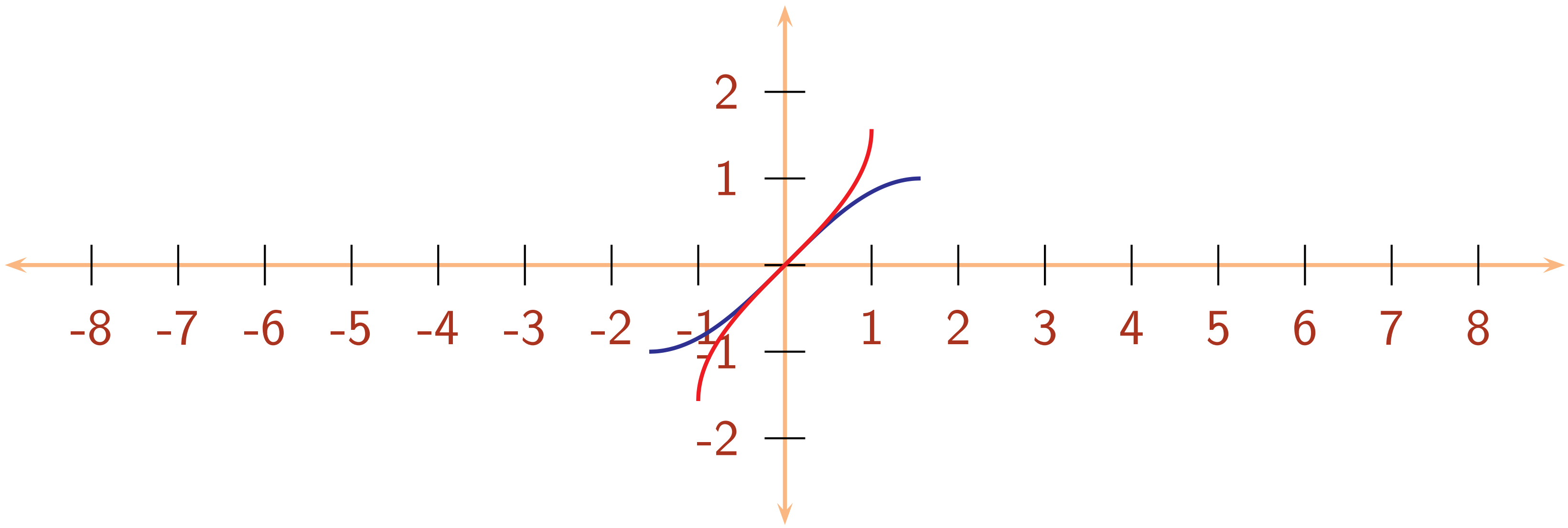
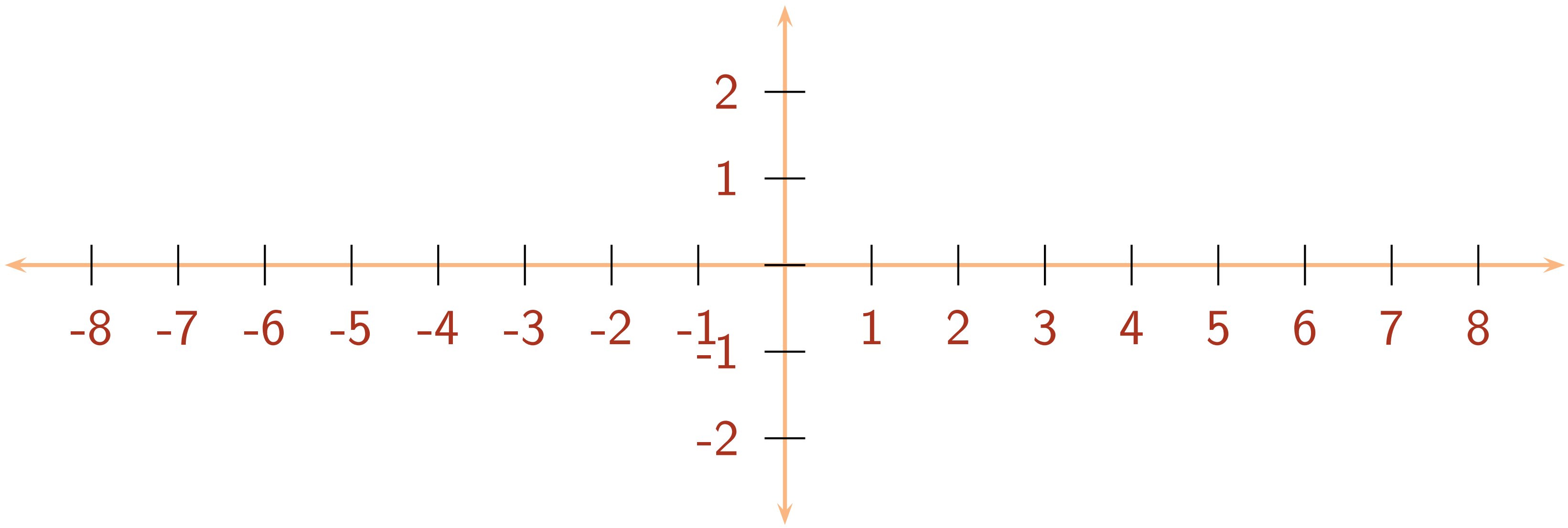


Fig 10

Cyklometrické funkce



Cyklometrické funkce

$f(x) = \cos x$

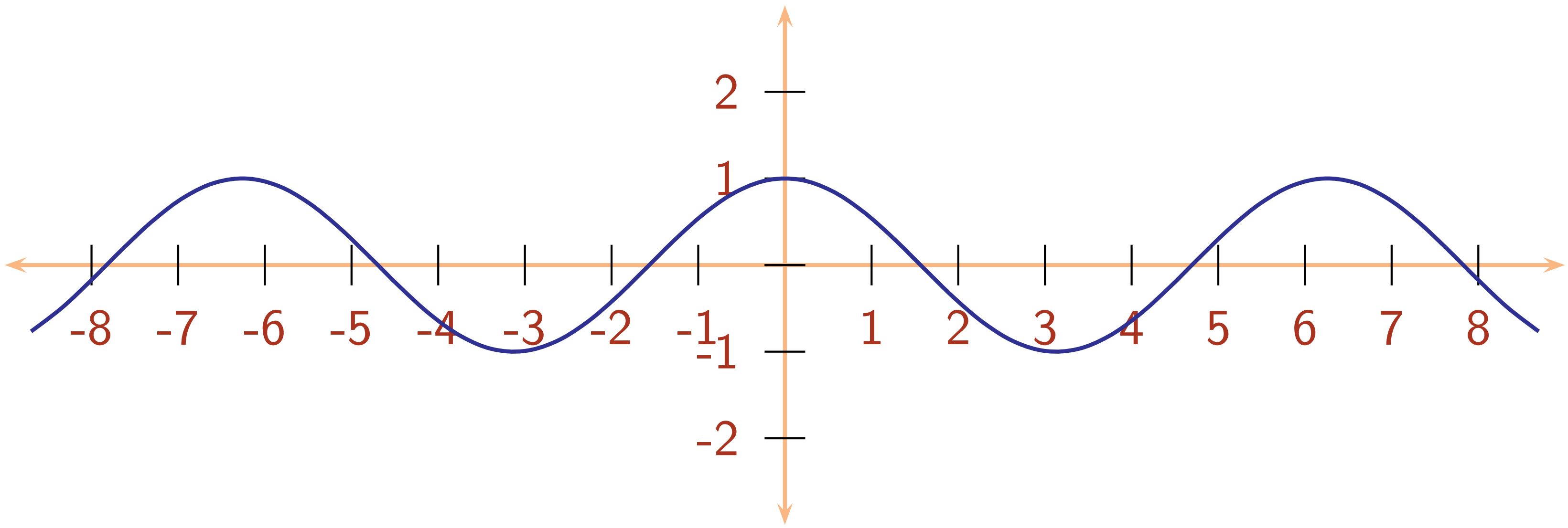
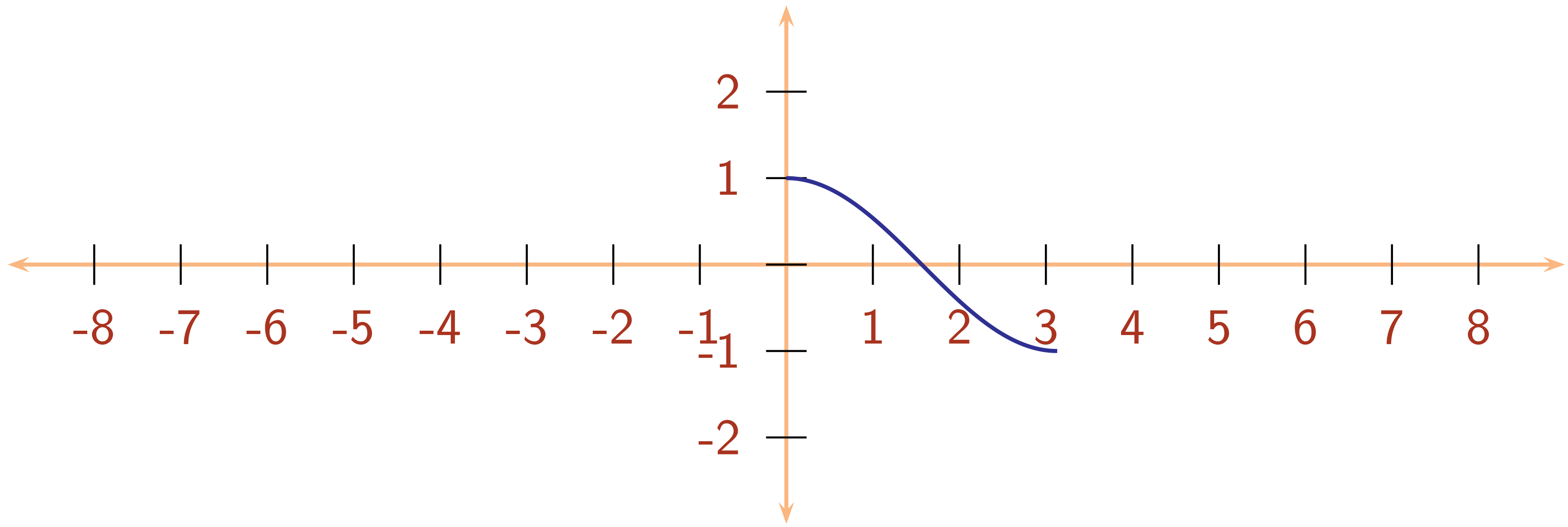


Fig 11

Cyklometrické funkce

$f(x) = \cos x$



Cyklometrické funkce

$f(x) = \cos x$

$f^{-1}(x) = \text{arccos}x$

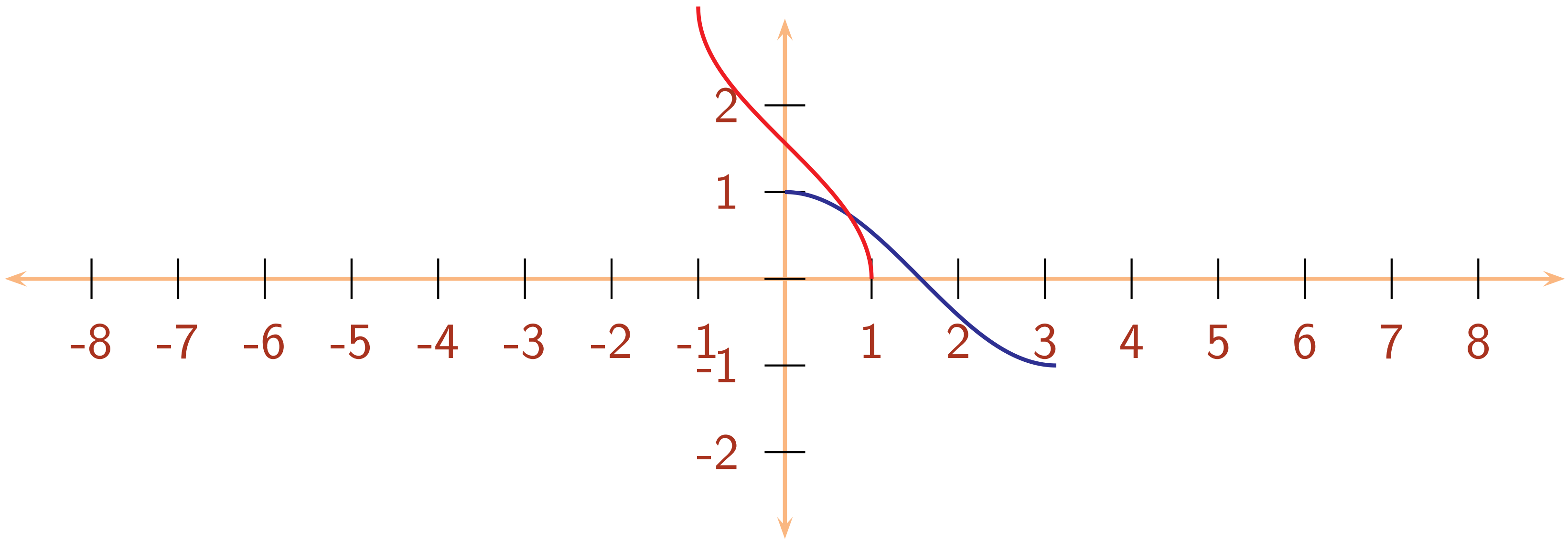
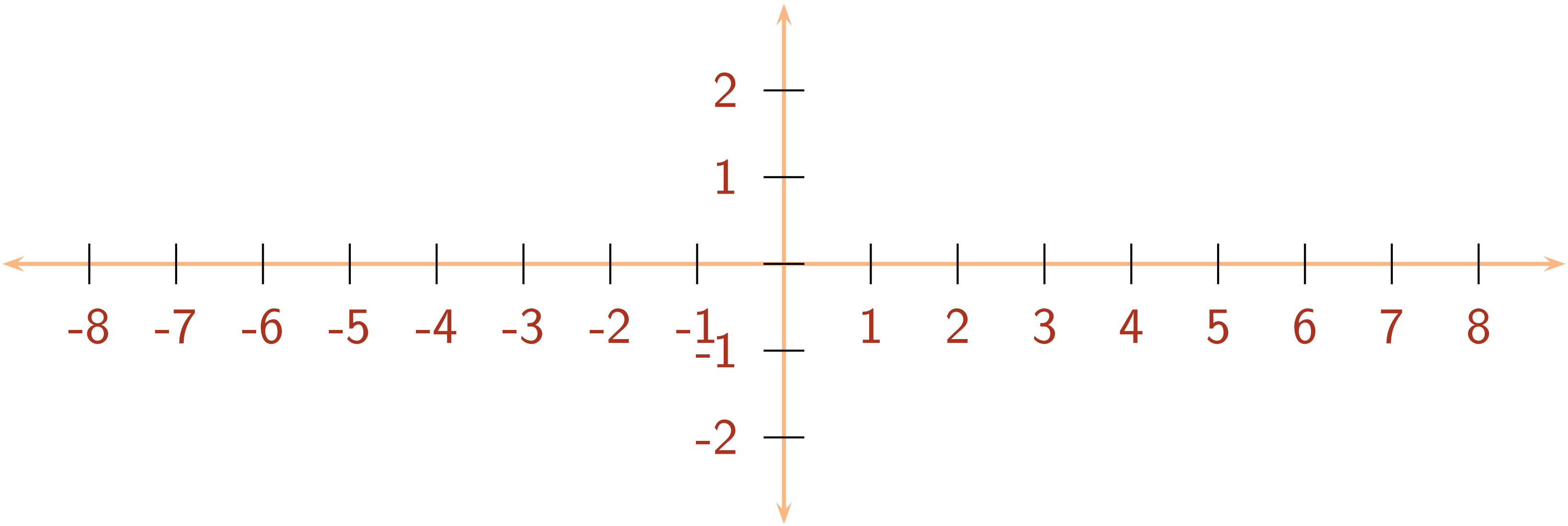


Fig 12

Cyklometrické funkce



Cyklometrické funkce

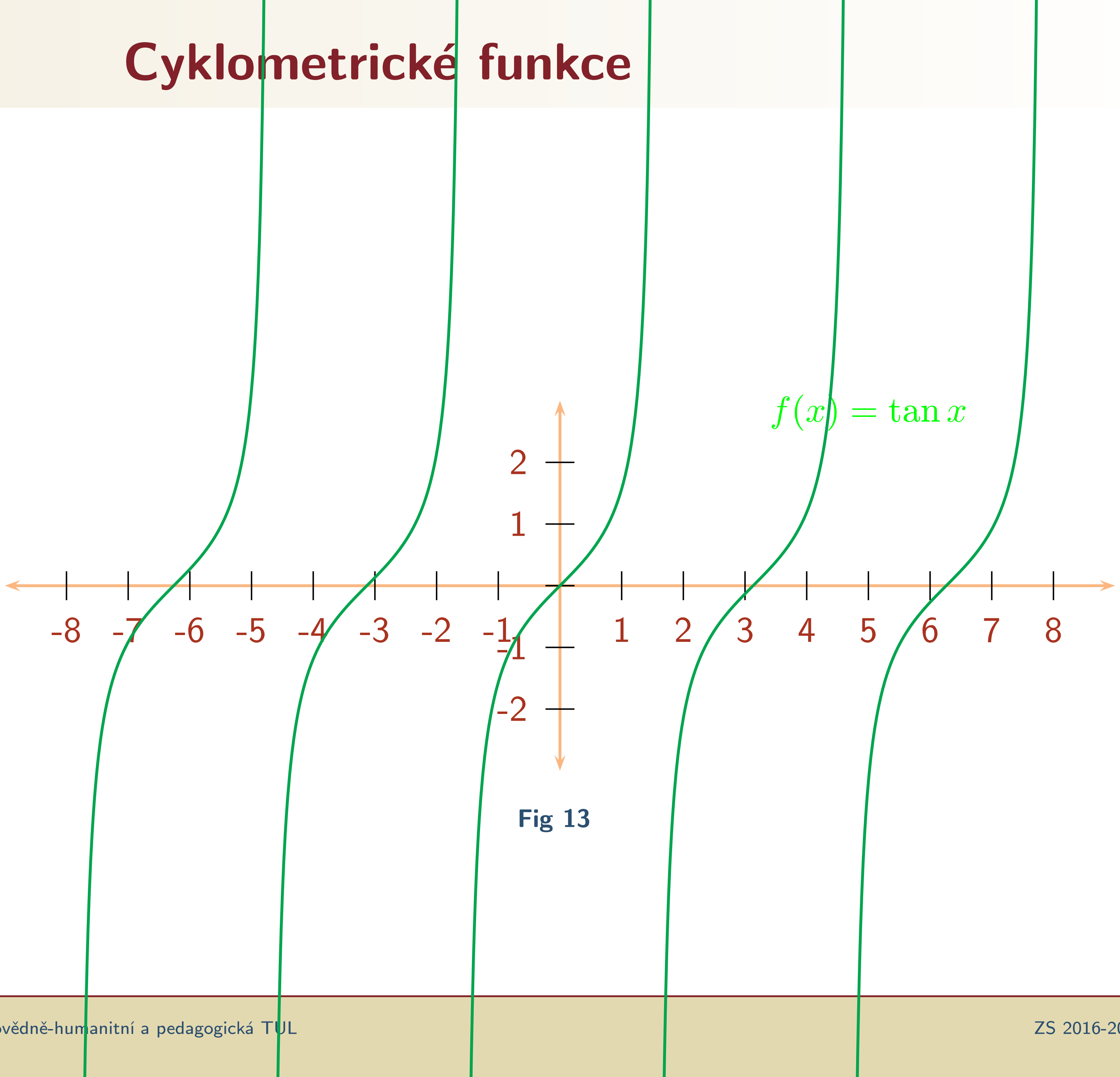
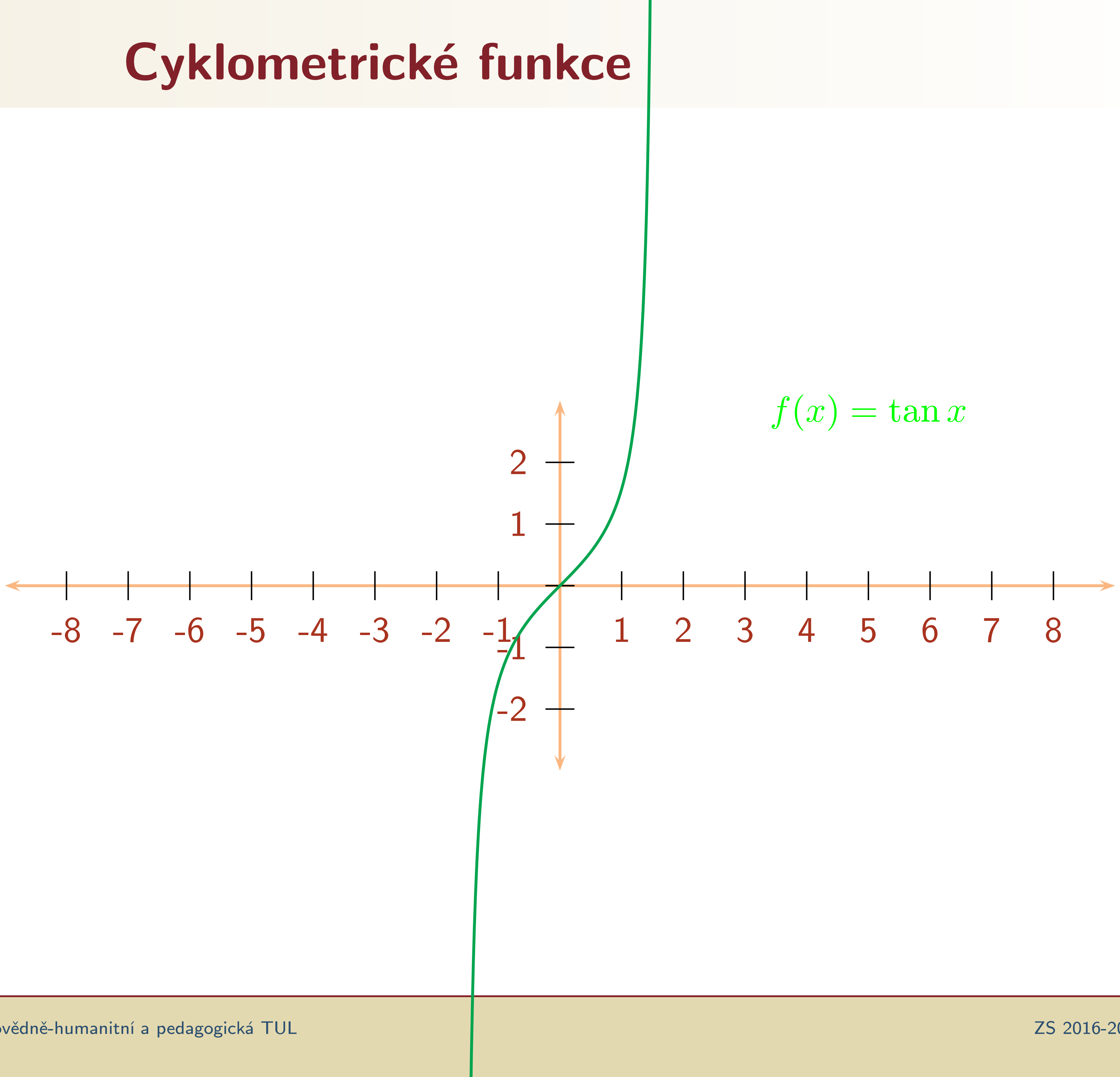


Fig 13

Cyklometrické funkce



Cyklometrické funkce

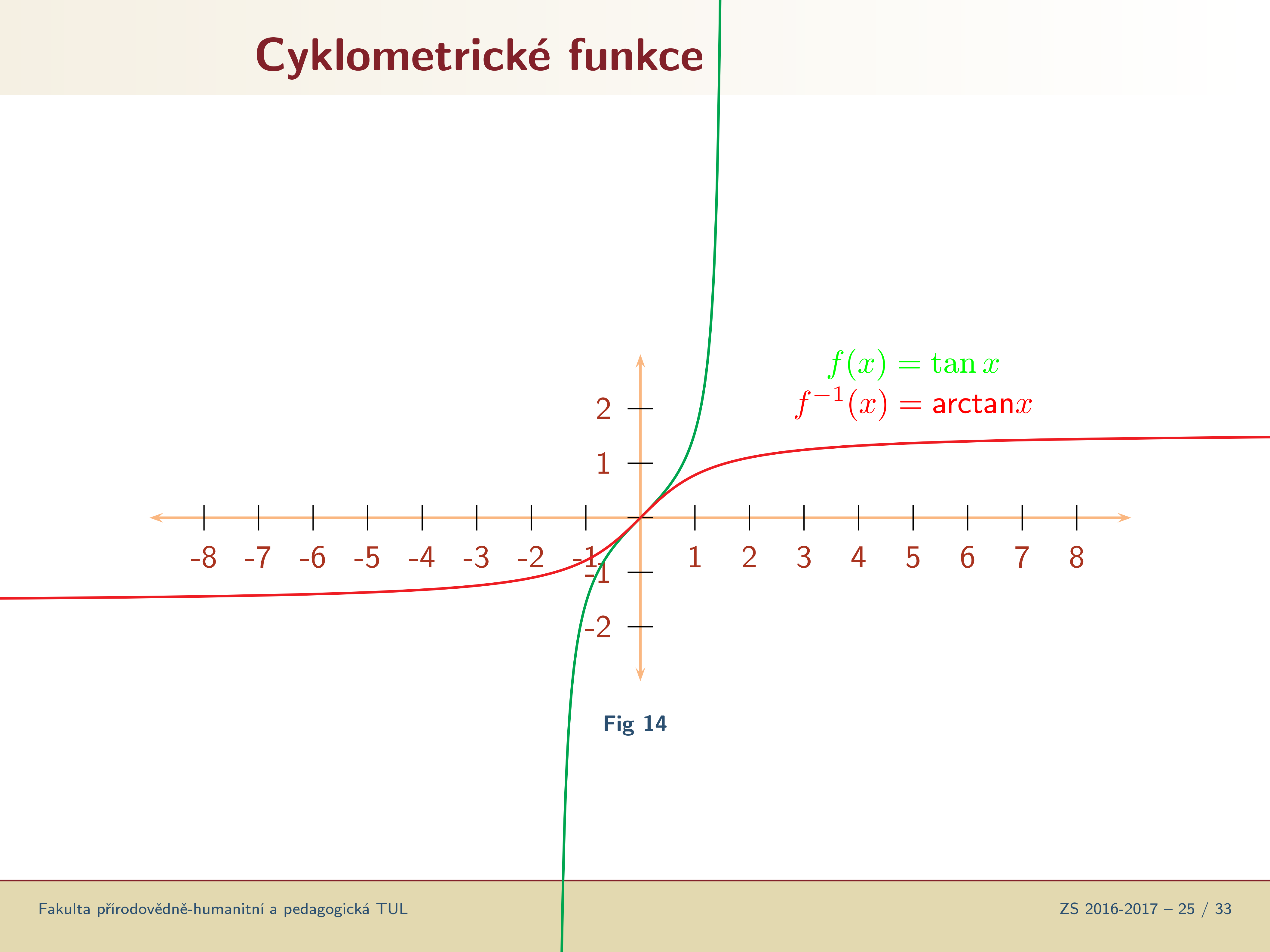


Fig 14

Cyklometrické funkce

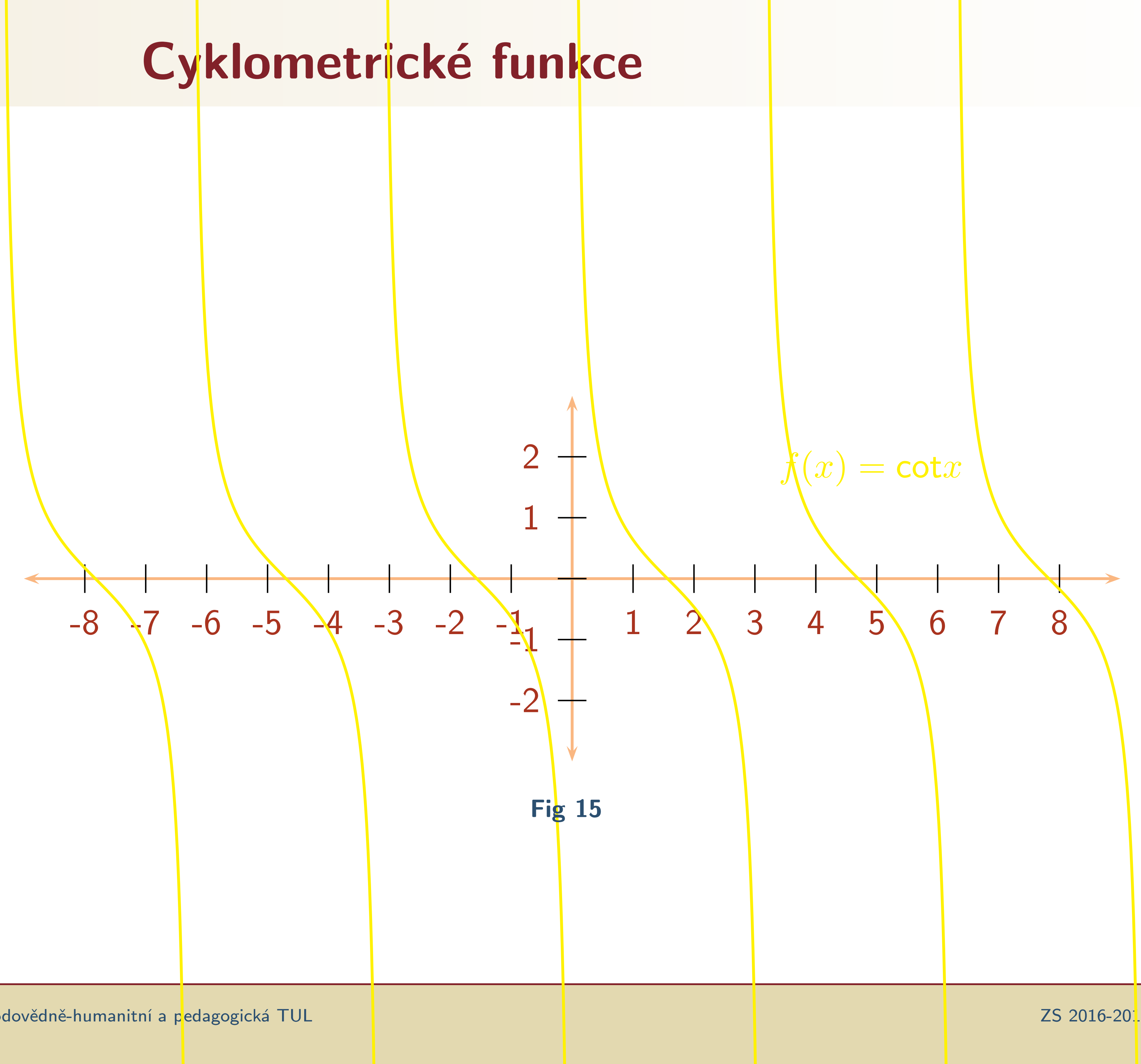
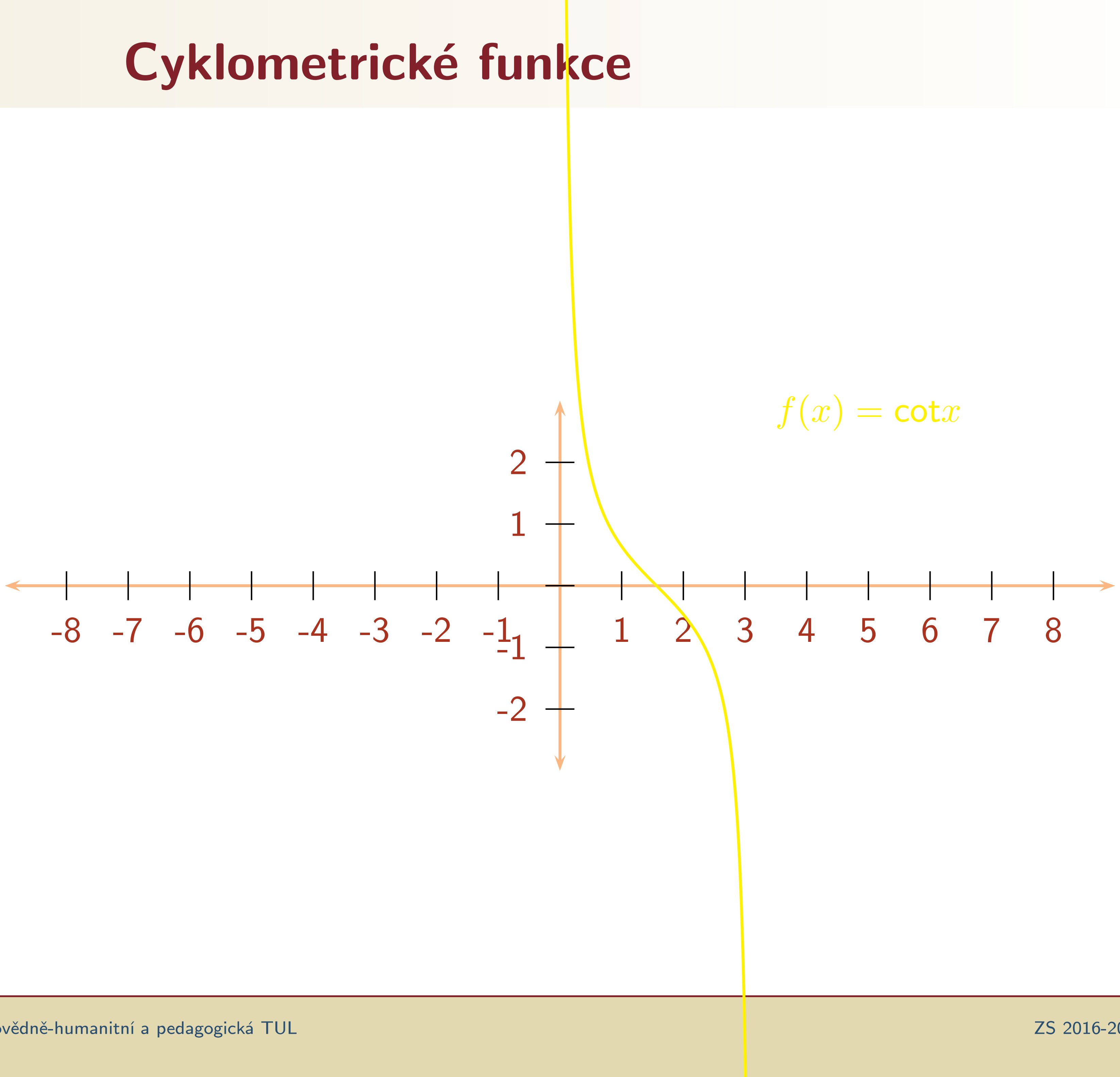


Fig 15

Cyklometrické funkce



Cyklometrické funkce

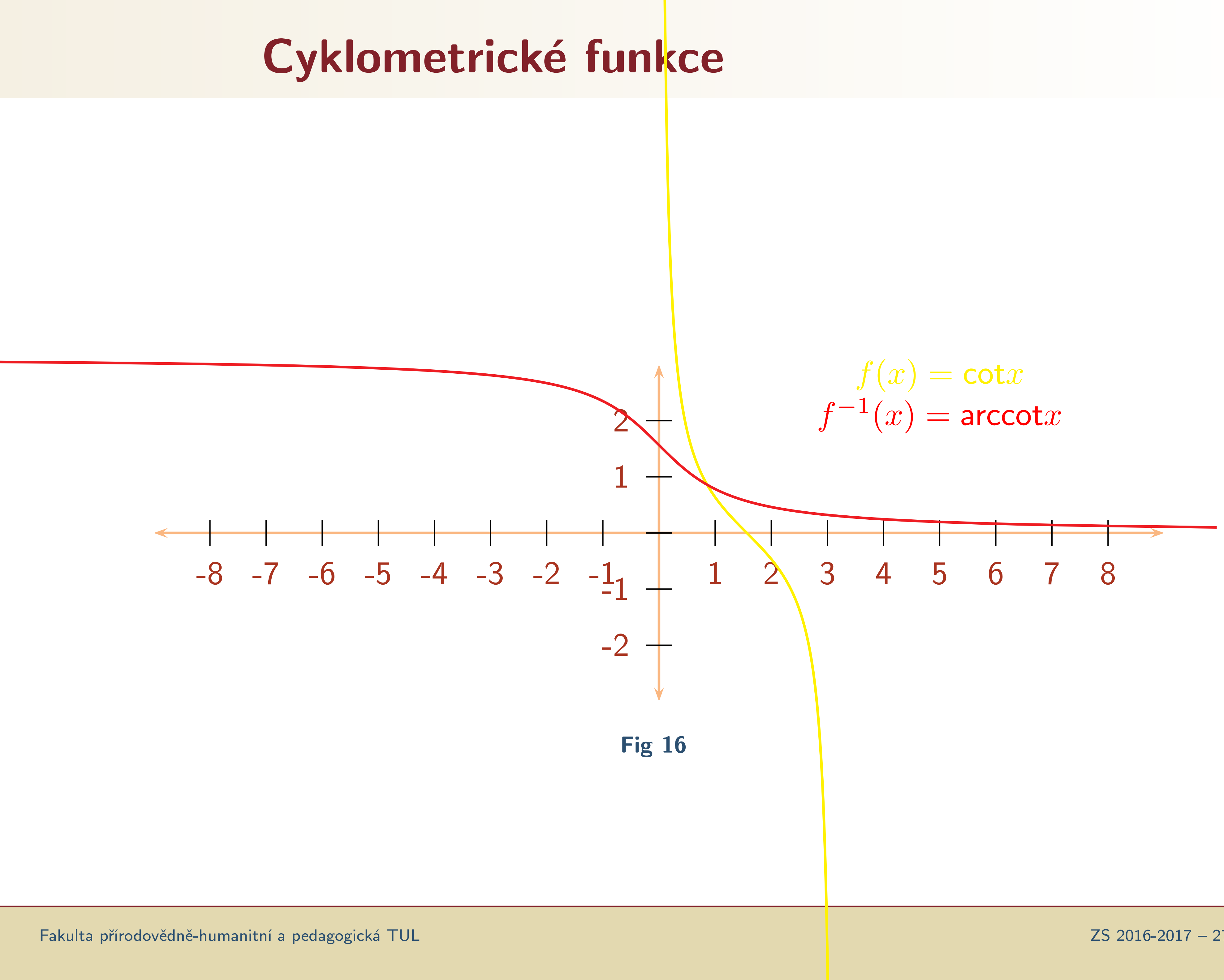


Fig 16

Funkce

Definice Základní elementární funkce
Základní elementární funkce jsou konstantní, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

Definice
Elementární funkce jsou všechny funkce, které lze získat ze základních elementárních funkcí pouze sčítáním, odečítáním, násobením, dělením a tvořením složených funkcí.

Funkce absolutní hodnota

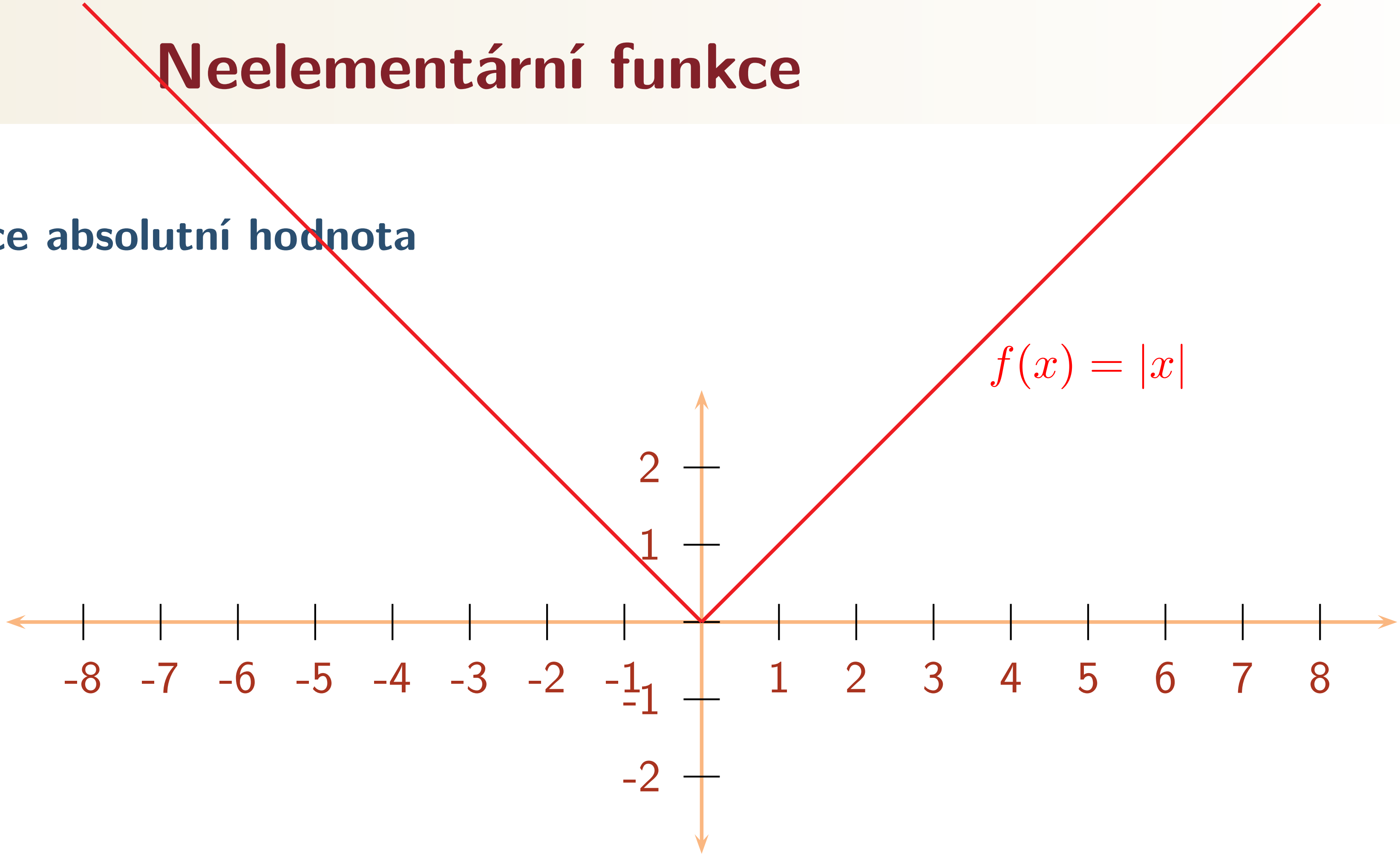


Fig 17

Neelementární funkce

Funkce signum

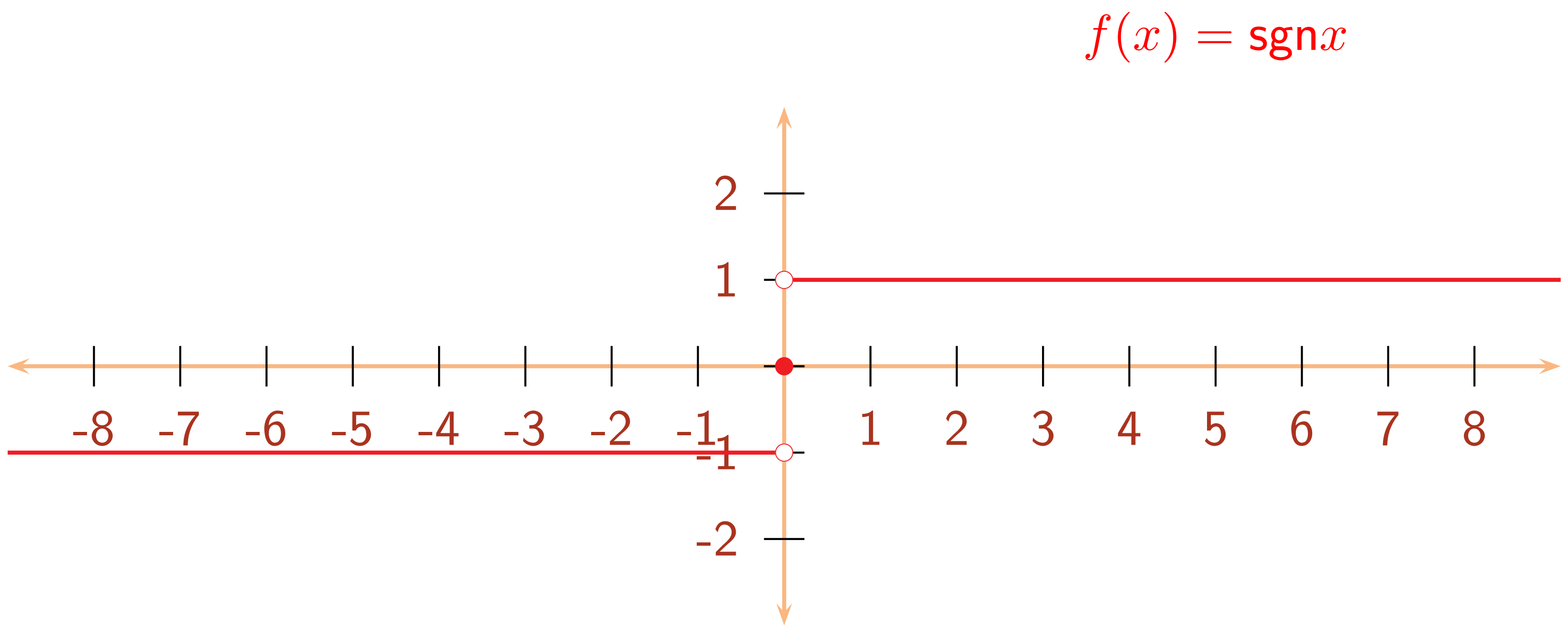


Fig 18

Neelementární funkce

Funkce celá část

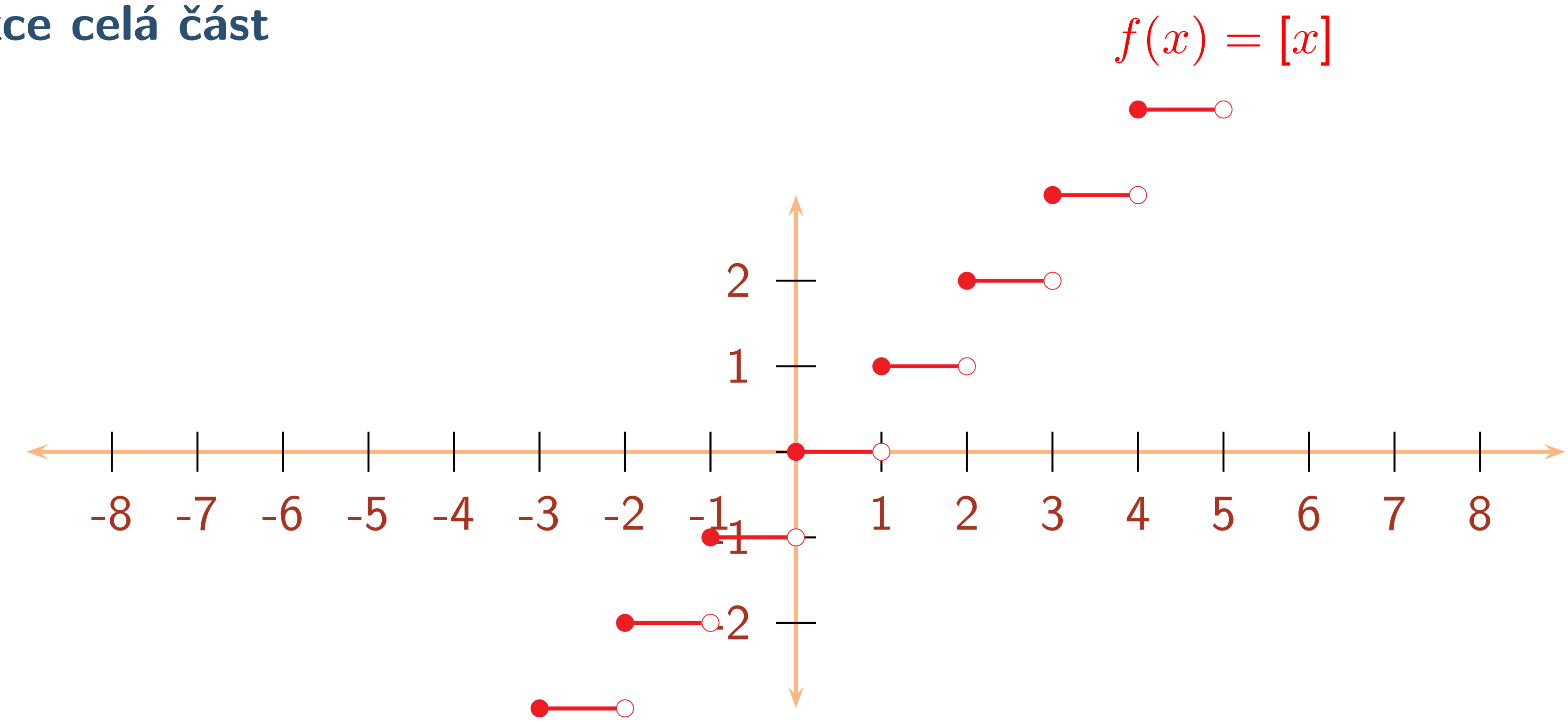


Fig 19

Funkce

Definice (Polynom a racionální funkce)
Polynomem se rozumí funkce s funkčním předpisem

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

kde $m \in N \cup \{0\}, \ a_0, a_1, \ldots, a_m \in R$.
$f(x) = 0$ nulový polynom
$f(x) = a_1 x + a_0$, kde $a_1 \neq 0$, se nazve lineární funkce.

Racionální funkcí se rozumí funkce, která je podílem dvou polynomů, přičemž dělitel není nulový polynom.

Funkce

Definice (Extrémy)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **globální maximum**, resp. **globální minimum**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.
Má-li funkce f v bodě a globální maximum, nebo globální minimum řekneme, že má v a **globální extrém**.