Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

10. 10. 2016

Posloupnosti

Definice
Posloupnost je funkce $f : N \to R$, kde N je množina přirozených čísel a R množina reálných čísel.

Poznámka
f přiřazuje každému přirozenému číslu $n = 1,\, 2,\, \ldots$ reálné číslo $f(n) = a_n$.

Příklady
Aritmetická posloupnost

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_1,\ d \in R$$

Geometrická posloupnost

$$a_n = a_1 q^{(n-1)}, \quad a_1,\ q \in R$$

Harmonická posloupnost

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Definice

Řekneme, že číslo a **je limita posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
jestliže platí

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0\ [n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon]$$

označujeme

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n\ .$$

Posloupnost, která má limitu, se nazývá **konvergentní**, posloupnost, která limitu nemá, **divergentní**.

Příklad

Harmonická posloupnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$

Posloupnosti

Poznámka
Číslo n_0 závisí na ε.
(čím menší je ε tím větší je n_0)

Poznámka
Pojem limita vypovídá o konci posloupnosti, tj. nezávisí na libovolném konečném počtu členů posloupnosti.
(změníme-li prvních 100 členů, nemá to na limitu žádný vliv)

Věta
Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Poznámka
Při postupu podle definice musíme nejprve limitu uhodnout a pak dokázat, že splňuje podmínky definice.

Věta (o počítání limit)
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ a nechť $c \in R$. Pak platí
1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$
2) $\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c. \lim_{n\to\infty} a_n = c.a$
3) $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n. \lim_{n\to\infty} b_n = a.b$
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ pokud $b \neq 0$.

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} =$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+1} =$$

Definice (nevlastní limita)
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $+\infty$, **(resp.** $-\infty$**)**, jestliže

$$\forall\ K\ \exists\ n_0\ [n > n_0 \implies a_n > K]$$

$$\forall\ K\ \exists\ n_0\ [n > n_0 \implies a_n < K]$$

značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \qquad (\text{resp. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+1}{n^2+1} =$$

Věta o monotónní posloupnosti

Poznámka
Věta o počítání limit platí i pro nevlastní limity, pokud mají výrazy na pravých stranách smysl.

Věta
Nechť $a_n \leq b_n$ pro každé n, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Pak $a \leq b$.

Věta (o dvou policajtech)
Nechť $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro každé n, nechť existují konečné limity $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} c_n = c$ a nechť $a = c$. Pak existuje i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ a platí $a = b = c$.

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} =$$

Věta o monotónní posloupnosti

Věta (o monotónní posloupnosti)
Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotónní a omezená, pak je konvergentní.

Věta
Posloupnost $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí.

Věta
Posloupnost $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je shora omezená.

Věta
Posloupnost $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ má limitu.

Definice
Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $(1 + \frac{1}{n})^n$

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \ .$$

Poznámka

$$e \approx 2,71828\ldots$$

Věta o monotónní posloupnosti

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{(n+5)}=$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n}=$$