Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

17. 10. 2016

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu
Předpokládáme, že $a \in R,\ \delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu** a s poloměrem δ ($\delta-$okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in R; |x - a| < \delta\} = (a - \delta,\ a + \delta)\ .$$

Poznámka
V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného $\delta-$okolí bodu a neni podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a.

Příklad
Sestrojte okolí bodu 2 s poloměrem 1. interval $(1,\ 3)$

Limita a spojitost funkcí

Definice
Je-li $a \in R$, $M \subset R$ a existuje-li okolí bodu a, které je podmnožinou množiny M řekneme, že a je **vnitřní bod** množiny M.

Příklad
$M = (-1, 1] \cup \{3\}$

vnitřní body $(-1, 1)$
$\{-1, 1, 3\}$ nejsou vnitřní body

Definice
Je-li $a \in R$, $M \subset R$ a obsahuje-li každé okolí bodu a nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do množiny M, řekneme, že a je **hraniční bod** množiny M.

Příklad
$M = (-1, 1] \cup \{3\}$

hraniční body $\{-1, 1, 3\}$
jiné hraniční body M nemá

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **limitu** b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Poznámka
Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a, avšak různé od a.
Funkce ovšem nemusí mít limitu v každém bodě.

Příklad
$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} =$$

Příklad
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x) =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.1 (o jednoznačnosti limity)
Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak
$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$,
$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = b.c$,
je-li navíc $c \neq 0$, pak také
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Příklad

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} =$$

Věta 3.3
Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0 \ .$$

Příklad

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)
Je-li $\lim_{x \to a} g(x) = b$, $\lim_{x \to b} f(x) = c$, je-li $h = f(g)$ a je-li pro každé $x \in D(g), x \neq a$, slpněna nerovnost $g(x) \neq b$, pak

$$\lim_{x \to a} h(x) = c\ .$$

Příklad

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) =$$

Příklad

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{arctg}(x^2 + e^x) =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)
Je-li f elementární funkce a je-li a vnitřní bod $D(f)$, pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ .$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0} \sin x =$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0} e^x =$$

Definice
Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞.
Předpokládáme, že $s \in R$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka
Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s, pak hovoříme stručně o okolí.

Definice
Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in R^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$, **(resp.** ∞**)**, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.
Píšeme: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$).

Příklad

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$$

Poznámka
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka
Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Definice (Jednostranná limita)
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** b, (resp. **limitu zleva** b), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.
Píšeme $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$).
Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka
Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)
Platí :
$\lim_{x \to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)
Platí implikace :
Je-li $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = c$ a $b \neq c$, potom $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x) =$$

Definice
Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} x \ ,$$

$$0^- = \lim_{x \to 0^-} x \ .$$

Poznámka (operace s 0^+, resp. 0^-)
$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$

Příklad
$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) =$

Poznámka
Analogicky se definují i nevlastní jednostranné limity.

Spojitost

Definice (Spojitost v bodě)
Řekneme, že funkce f **je spojitá v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ .$$

Poznámka
Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Příklad
Polynom a funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém $a \in R$.
Racionální funkce je spojitá v každém bodě $a \in R$, v němž je definována.

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak je v bodě a spojitá funkce $f+g$, $f-g$, fg. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Příklad
$f(x) = e^x + x^2$

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)
Je-li funkce g spojitá v bodě a a je-li funkce h spojitá v bodě $g(a)$, pak je složená funkce $f = h(g)$ spojitá v bodě a.

Příklad
$f(x) = \sin x^2$

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)
Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \; .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a, jestliže

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \; .$$

Poznámka
Platí analogické věty větám 4.1 a 4.2.

Spojitost na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f **je spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I, pokud je zleva uzavřený, a jestliže je spojitá zleva v pravém hraničním bodě intervalu I, pokud je zprava uzavřený.

Věta 4.3

Elementární funkce f je spojitá na každém intervalu $I \subset D(f)$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)
Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I, pak existují čísla $c, d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) .$$

Poznámka
Věta říká, že spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá v nějakém bodě své nejmenší funkční hodnoty a v některém bodě své největší funkční hodnoty.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a,b)$ takové, že

$$f(p) = q\ .$$

Poznámka
Funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.
Zvláštní případ pro $q = 0$
existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.
(metoda půlení intervalu)

Příklad
Nalezněte řešení rovnice

$$e^x + x = 0$$

s přesností na tři desetinná místa.

Vlastnosti spojitých funkcí

Řešení

Interval	Střed	Hodnota ve středu
$[-1, 0]$	$x_0 = -0,5$	$f(x_0) = 0,106\,530\,8$
$[-1, -0,5]$	$x_1 = -0,75$	$f(x_1) = -0,277\,633\,4$
$[-0,75, -0,5]$	$x_2 = -0,625$	$f(x_2) = -0,089\,738\,5$
$[-0,625, -0,5]$	$x_3 = -0,5625$	$f(x_3) = 0,007\,282\,9$
$[-0,625, -0,5625]$	$x_4 = -0,59375$	$f(x_4) = -0,041\,497\,5$
$[-0,59375, -0,5625]$	$x_5 = -0,578125$	$f(x_5) = -0,017\,175\,8$
$[-0,578125, -0,5625]$	$x_6 = -0,5703125$	$f(x_6) = -0,004\,963\,7$
$[-0,5703125, -0,5625]$	$x_7 = -0,5664062$	$f(x_7) = 0,001\,155\,3$
$[-0,5703125, -0,5664062]$	$x_8 = -0,5683593$	$f(x_8) = -0,001\,905\,2$
$[-0,5683593, -0,5664062]$	$x_9 = -0,5673828$	$f(x_9) = -0,000\,375\,3$
$[-0,5673828, -0,5664062]$	$x_{10} = -0,5668945$	$f(x_{10}) = 0,000\,390\,0$

Z tabulky vyplývá, že

$$x^* \doteq -0,567 \ ,$$

přičemž všechna tři desetinná místa jsou platná.