Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

24. 10. 2016

Derivace

Definice
Řekneme, že funkce f **má v bodě** a **derivaci**, jestliže existuje limita

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Tuto limitu značíme $f'(a)$ nebo $\frac{df}{dx}(a)$.
V případě,že

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

je nevlastní, hovoříme o **nevlastní derivaci funkce** f **v bodě** a.
V případě jednostranných limit nebo nevlastních jednostranných limit

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,\quad \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

hovoříme o **jednostranných derivacích** nebo **nevlastních jednostranných derivacích funkce** f **v bodě** a,
značíme je $f'_+(a)\,,\quad f'_-(a)$.

Derivace

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = c$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = x$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = \mathrm{sgn} x$ v bodě $a = 0$.

$$f'_{-}(a) =$$

$$f'_{+}(a) =$$

Derivace základních elementárních funkcí

Věta 5.1
Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, pak je v bodě a spojitá.
(naopak neplatí, $|x|$)

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = \mathrm{sgn}|x|$ v bodě $a = 0$.

$$f'_-(a) =$$
$$f'_+(a) =$$

Derivace základních elementárních funkcí

Definice
Derivací funkce f se rozumí funkce f', jejímž definičním oborem $D(f')$ je množina všech $x \in D(f)$, v nichž má funkce f derivaci,
a která přiřazuje každému $x \in D(f')$ derivaci $f'(x)$ funkce f v bodě x.
Značí se f' nebo $\frac{df}{dx}$.

Příklad
Konstantní funkce $f(x) = c$ má derivaci f' definovanou na $D(f') = R$, pro kterou platí

$$f'(x) = 0 \ .$$

Příklad
Funkce $f(x) = x$ má derivaci f' definovanou na $D(f') = R$, pro kterou platí

$$f'(x) = 1 \ .$$

Derivace základních elementárních funkcí

$$
\begin{aligned}
c' &= 0\ , \\
x' &= 1\ , \\
(x^n)' &= nx^{n-1}\ , \\
(a^x)' &= a^x \ln a \quad (a > 0)\ , \\
(e^x)' &= e^x\ , \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)\ , \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}\ , \\
(\sin x)' &= \cos x\ , \\
(\cos x)' &= -\sin x\ , \\
(\mathsf{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\ , \\
(\mathsf{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\ ,
\end{aligned}
$$

Derivace základních elementárních funkcí

$$(\text{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

$$(\text{arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{x^2+1} \ ,$$

$$(\text{arccotg}x)' = -\frac{1}{x^2+1} \ .$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.2 (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Májí-li funkce f a g v bodě a derivaci, pak má v bodě a derivaci funkce $f+g$, $f-g$, a fg a platí

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ , \tag{1}$$
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)\ , \tag{2}$$
$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)\ , \tag{3}$$

je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak má v bodě a derivaci i funkce $\frac{f}{g}$ a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}\ . \tag{4}$$

Poznámka
Věta platí i pro nevlastní derivace, jednostranné derivace a nevlastní jednostranné derivace, pokud existují výrazy na pravách stranách vztahů (1) - (4).

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \ln x . \cos x$.

$$f'(x) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

$$f'(x) =$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.3 (o derivaci složené funkce)
Má-li funkce g v bodě a derivaci $g'(a)$, má-li funkce h v bodě $g(a)$ derivaci $h'(g(a))$ a je-li $f = h(g)$, pak funkce f má v bodě a derivaci

$$f'(a) = h'(g(a)).g'(a)\ . \tag{5}$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$f'(x) =$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = \cos(\ln x)$ pro $x \in (0, \infty)$.

$$f'(x) =$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.4 (o derivaci inverzní funkce)
Je-li $D(f)$ interval, je-li funkce f prostá a spojitá na $D(f)$ a má-li v bodě b derivaci $f'(b) \neq 0$, pak její inverzní funkce f^{-1} má derivaci v bodě $a = f(b)$ a platí

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(b)} \ . \tag{6}$$

Příklad
Určete derivaci funkce $f(x) = \text{arcsin} x$.

$$g(x) = \sin^* x \quad \text{na } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$b = \text{arcsin} a \quad \text{pak} \quad a = \sin b$$
$$f'(a) = (g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Příklad (derivace funkce s neznámou jak v základu, tak v exponentu)
Určete derivace funkce $f(x) = x^x$ definované na $(0, \infty)$.

Nejprve malý trik

$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$
$$f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$$

Vyšší derivace

Definice (lokální v bodě)
Předpokládáme, že funkce f má derivaci f' s definičním oborem $D(f')$. Označme $g = f'$ a zvolme $a \in D(f')$. Má-li funkce g v bodě a derivaci $g'(a)$, řekneme, že číslo $g'(a)$ je **druhá derivace funkce f v bodě a** a označíme ho $f''(a)$ nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$.
Obdobně zavádíme nevlastní druhou derivaci funkce f v bodě a, jednostranné druhé derivace v bodě a, nevlastní jednostranné druhé derivace v bodě a.

Příklad
Určete druhou derivaci funkce $f(x) = x^3$ v bodě $a \in R$.

Definice (funkce na intervalu)
Druhou derivací funkce f se rozumí funkce f'', jejímž definičním oborem je množina všech čísel $x \in D(f')$, v nichž má funkce f druhou derivaci, a která přiřazuje každému $x \in D(f'')$ druhou derivaci $f''(x)$ funkce f v bodě x.
Značíme ji f'' nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Příklad
Určete funkci druhá derivace k funkci $f(x) = x^3$.

Vyšší derivace

Poznámka

Analogicky definujeme třetí, (čtvrtou ...) derivaci funkce f v bodě a a funkce třetí (čtvrtá ...) derivace.
Hovoříme souhrnně o vyšších derivacích funkce f.
Značíme f', f'', $f''', \ldots, f^{(m)}, \ldots$

Příklad

Určete všechny derivace funkce $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Geometrické aplikace

Má-li funkce f v bodě a derivaci, pak tečna t grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ má směrnici

$$k = f'(a)$$

a prochází bodem $[a, f(a)]$, má proto rovnici

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \ .$$

Normálou grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ se rozumí kolmice n k tečně procházející bodem $[a, f(a)]$.
Její rovnice je pro $f'(a) \neq 0$

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

a pro $f'(a) = 0$

$$x = a \ .$$

Geometrické aplikace

Je-li funkce f spojitá v bodě a a má-li v něm nevlastní derivaci, považujeme za tečnu t jejího grafu v bodě $[a, f(a)]$ přímku o rovnici

$$x = a \ ,$$

její normála n v témže bodě má pak rovnici

$$y = f(a) \ .$$

Příklad
Určete tečnu a normálu paraboly $y = x^2$ v bodě $[1, 1]$.

Geometrické aplikace

Věta 5.5 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)
Je-li $a < b$, je-li f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má-li na (a, b) derivaci, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; .$$