Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

21. 11. 2016

Určitý integrál

Určitý integrál můžeme stručně charakterizovat jako reálné číslo, kterým vyjadřujeme celkové množství, například obsah, hmotnost, práci proměnné síly, ...

Motivační úloha:
Jak se určí obsah S obrazce ?

$$S \doteq 0,25.f(0) + 0,25.f(0,25) + 0,25.f(0,5) + 0,25.f(0,75) = 0,55208$$

Počet částí	Součet	Počet částí	Součet
4	$0,552\,080$	128	$0,662\,669$
8	$0,606\,766$	256	$0,664\,429$
16	$0,636\,056$	512	$0,665\,176$
32	$0,651\,175$	1024	$0,665\,218$
64	$0,658\,848$	2048	$0,666\,228$

Takto vyjádříme čísla (součty), která přibližně vyjadřují číslo S.
Přitom platí, že číslo S může být vyjádřeno uvedeným postupem s libovolnou přesností.

Určitý integrál

Poznámka
Obdélníky můžeme vyjádřit mnoha způsoby tak, že jednu stranu každého z nich volíme funkční hodnotu $f(c)$, kde c je libovolné číslo v částečném intervalu.
(v příkladě jsme volili levý krajní bod)

Hledané číslo S je určeno funkcí $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}$ a intervalem $[0, 1]$, zapisujeme ho

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})\, dx$$

a čteme „určitý integrál funkce $x^2 + \frac{1}{3}$ na intervalu $[0, 1]$“.

Určitý integrál

Definice
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$.
a) Interval $[a, b]$ rozdělíme na částečné intervaly

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ ,$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
Množinu dělících bodů

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

nazveme **dělením** D intervalu $[a, b]$.
Délku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ označíme Δx_i, tj.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

a nazveme **krokem dělením** D.
Maximální krok dělení D označíme

$$h(D) = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}\ .$$

Určitý integral

b) K dané funkci f a dělení D utvoříme součet

$$S(D, f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \ ,$$

kde c_1, c_2, $\ldots$, c_n jsou libovolné body, zvolené v jednotlivých částečných intervalech, tj.

$$c_1 \in [x_0, x_1],\ c_2 \in [x_1, x_2],\ \ldots, c_n \in [x_{n-1}, x_n] \ .$$

Součet $S(D, f)$ nazveme **integrálním součtem funkce** f.

c) Jestliže za uvedených předpokladů existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, tak toto číslo I nazýváme **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $[a, b]$ a píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Určitý integrál

Poznámka (přesný význam „aproximovat číslo I integrálním součtem s libovolnou přesností“)
Pro každé přirozené k existuje číslo $H > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ s maximálním krokem $h(D) < H$ a pro libovolnou volbu $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ platí nerovnost

$$|S(D, f) - I| \leq 0,5.10^{-k} \ .$$

Definice
Jestliže k dané funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje určitý integrál, pak řekneme, že je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
Interval $[a, b]$ se nazývá integrační obor, čísla a, b jsou integrační meze, a je dolní mez, b horní mez a funkce f se nazývá integrovaná funkce.

Poznámka
Výpočet integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ se nazývá integrování funkce f na intervalu $[a, b]$. Vstupem této operace je funkce f a integrační meze, výstupem operace je číslo.

Příklad
Podle definice určete integrál funkce $f(x) = k$ na intervalu $[a, b]$.

Určitý integrál

Věta 8.1.
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta 8.2.
Je-li funkce f omezená a po částech spojitá na intervalu $[a,b]$, potom je na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad
Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
(není definována v bodě 0, ale je integrovatelná na libovolném intervalu $[a,b]$)

Vlastnosti integrálů

Hodnota integrálu závisí

A) na integračním oboru

B) na integrovatelné funkci

A)

Věta 8.3. (aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru)
Nechť je $a < c < b$, funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$, právě když je integrovatelná na intervalech $[a, c]$, $[c, b]$. Přitom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Větu 8.3 používáme v těchto případech:

a) Integrovatelná funkce je zadána různými vzorci na různých intervalech.

b) Integrovatelná funkce má konečný počet bodů nespojitosti.

Příklad.
$f(x) = |x|\,,\ x \in [-1, 1].$

Vlastnosti integrálů

Věta 8.4.
Uvažujme dvě funkce f a g, definované na intervalu $[a, b]$ a lišící se navzájem v konečném počtu bodů. Je-li jedna z nich integrovatelná v $[a, b]$, potom je i druhá integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

Důsledek.
Integrál nezávisí na tom, jak je funkce f definována v krajních bodech integračního oboru.
$\int_a^b f(x)\,dx$ vyjadřuje integrál f na kterémkoli z intervalů $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).

Vlastnosti integrálů

Definice.
Pro $a \geq b$ definujeme určitý integrál takto:
1) Je-li $a > b$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ .$$

(slovy: Záměnou mezí se zamění znamení integrálu)
2) Je-li $a = b$, potom

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \ .$$

Vlastnosti integrálů

B)

Věta 8.5. (linearita integrálu vzhledem k integrandu)
Jsou-li funkce f a g integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a K je libovolná konstanta, potom jsou integrovatelné na $[a, b]$ funkce Kf a $f + g$. Přitom platí

$$\int_a^b K f(x)\,dx = K \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

(slovy: Vytknutí konstanty před integrační znak.)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \,.$$

(slovy: Integrál součtu je roven součtu integrálů.)

Vlastnosti integrálů

Důkaz.
Integrál aproximujeme integrálními součty

$$\sum_{i=1}^{n} K f(c_i)\Delta x_i = K \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i$$

s libovolnou přesností.
Z integrovatelnosti funkcí f a g vyplývá integrovatelnost funkcí na levé straně rovnosti.

Vlastnosti integrálů

Věta 8.6.
Jestliže pro integrovatelnou funkci f na intervalu $[a, b]$ platí nerovnosti

$$m \leq f(x) \leq M \ ,$$

potom pro její integrál platí následující odhady:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \ .$$

Důsledek.
1. Je-li funkce f integrovatelná a nezáporná na intervalu $[a, b]$, potom také integrál na $[a, b]$ je nezáporný, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \ .$$

2. Jsou-li funkce f a g integrovatelné na $[a, b]$ a platí zde nerovnost $f(x) \leq g(x)$, potom stejná nerovnost platí i pro integrály na $[a, b]$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

Vlastnosti integrálů

Věta 8.7. (citlivost integrálu na malou změnu integrované funkce)
Jsou-li funkce f a g integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a platí zde nerovnost

$$|f(x) - g(x)| \leq 0,5.10^{-k} \ ,$$

potom je

$$|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx| \leq 0,5.10^{-k}.(b-a) \ .$$

Poznámka
Význam věty lze vyjádřit takto: Nahradíme-li f v malém intervalu dostatečně přesně funkcí g, bude přibližně stejně přesně nahrazen také její integrál.

Vlastnosti integrálů

Věta 8.8. (o střední hodnotě funkce na intervalu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom existuje alespoň jedno číslo $x_0 \in [a, b]$ takové, že platí

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \ . \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Číslo $f(x_0)$ vyjádřené integrálem (1) se nazývá střední hodnota funkce f na intervalu $[a, b]$.

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

V některých případech můžeme vyjádřit určitý integrál pomocí hodnot elementárních funkcí.
Základem těchto metod jsou vzorce pro derivaci funkce.

Příklad
Je-li $F(x) = x^2$, potom $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.
Obrácená úloha :
Víme, že je $F'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$ a máme určit $F(x)$.
(řešení, tj. funkci x^2 nazveme primitivní funkcí k funkci $2x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$)

Definice
Funkci F nazveme primitivní funkcí k funkci f na intervalu J,
jestliže pro všechna čísla $x \in J$ platí

$$F' = f \ .$$

Příklad
$x' = 1 \quad F = x \quad f = 1$
$(\sin x)' = \cos x \quad F = \sin x \quad f = \cos x$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad F = \mathrm{tg} x \quad f = \frac{1}{\cos^2 x}$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Je-li F primitivní funkcí k f na J (tj. $F' = f$ na J),
pak $F + c$ je také primitivní funkcí k f na J (neboť $(F + c)' = F' + c' = f$)
To znamená: Má-li funkce primitivní funkci, pak jich má nekonečně mnoho.

Příklad

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = \begin{cases} x^2 \\ x^2 + 1 \\ x^2 - 2 \end{cases}$$

Věta 9.1.
Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J,
potom každá primitivní funkce různá od F je ve tvaru $F + c$, kde c je konstanta.

!!!!! Ne ke každé funkci existuje primitivní funkce !!!

Věta 9.2.
Je-li funkce f spojitá na intervalu J, potom k ní existuje primitivní funkce F na J.

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, potom pro každé $c \in [a, b]$ existuje

$$\int_a^c f(x)\,dx\ .$$

Definujeme novou funkci pro $x \in [a, b]$ předpisem

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du\ .$$

Věta 9.3. (základní věta integrálního počtu)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, potom funkce

$$H(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

má derivaci pro každé $x \in [a, b]$ a platí

$$H'(x) = f(x)\ .$$

Použití primitivní funkce pro výpočet určitého integrálu

$H(x)\dots$ vyjadřuje jednu z primitivních funkcí k funkci f na $[a,b]$, dosaď $x=a$

$$H(a)=\int_a^a f(u)\,du=0\ ,$$

dosaď $x=b$

$$H(b)=\int_a^b f(u)\,du\ ,$$

tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)=H(b)-0=H(b)-H(a)\ .$$

Pro jinou primitivní funkci $G(x)=H(x)+c$ dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx=H(b)-H(a)=G(b)-c-(G(a)-c)=G(b)-G(a)\ .$$

Výpočet integrálu pomocí primitivní funkce

Věta 9.4. (Newton - Leibnizova)
Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a F její primitivní funkce na tomto intervalu, potom je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ ,$$

někdy píšeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \ .$$

Příklad

$\int_1^2 2x\,dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.