Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

28. 11. 2016

Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

Definice
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J zapíšeme symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce** f na intervalu J, tj.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ .$$

Konstantu C nazýváme **integrační konstanta**.

Příklad
$\int 2x\,dx = x^2 + C$

Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \qquad s \neq -1\ ,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ ,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\ ,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)\ ,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\ ,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg}x + C\ ,$$

Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathsf{arcsin} x + C \ ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathsf{arctg} x + C \ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathsf{ln}|x + \sqrt{x^2+1}| + C \ ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathsf{ln}|x + \sqrt{x^2-1}| + C \ .$$

Neurčitý integrál

Poznámka

Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.
(odtud název určitý či neurčitý integrál)

Věta 9.5.

Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx \ , \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \ .$$

Příklad.

$\int (2x^3 - \frac{3}{4}x - \sqrt{x})\, dx =$

Neurčitý integrál

Poznámka
a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)
Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

Příklad.
$\int_a^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt, \quad \int_a^x e^{t^2}\,dt, \quad \int_a^x \sin t^2\,dt, \ \ldots$

Integrování po částech

Věta 9.6 (per partes)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu I.
Pak platí

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \qquad \text{pro } x \in I\ .$$

Důkaz :
Vzorec pro derivaci součinu

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

integrujeme

$$u.v + C = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx\ .$$

Příklady
$\int xe^x\,dx$
$\int \ln x\,dx$
$\int \sin^2 x\,dx$

Poznámka
Integrační konstantu neuvádíme, dokud se na pravé straně vyskytuje nějaké znaménko integrálu.

Integrování po částech

Věta 9.7 (per partes pro určitý integrál)
Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce definované v $[a,b]$ a jsou tam spojité i se svými derivacemi u', v'.
Pak platí

$$\int_a^b uv'\,dx \;=\; [uv]_a^b \;-\; \int_a^b u'v\,dx\ .$$

Příklad
$\int_0^\pi x\sin x\,dx$

Substituce v integrálech

Věta 9.8 (Věta o substituci)
Jestliže $g' = g'(x)$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a funkce $f = f(t)$ je spojitá ve všech bodech $t = g(x)$, kde $x \in [a, b]$, potom platí

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; \int f(t)\,dt\;.$$

Schéma výpočtu

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \\ \frac{dt}{g'(x)} = dx \end{array}\right| =$$

$$= \int f(t).g'(x)\,\frac{dt}{g'(x)} = \int f(t)\,dt = \cdots = F(t) + C =$$

$$= \left|\; t = g(x) \;\right| = F(g(x)) + C$$

Příklad
$\int \sin^2 x \cos x\,dx$

Substituce v integrálech

Příklad

$\int \frac{x}{5+x^2}\,dx$

Příklad

$\int \frac{4x}{\sqrt{5+x^2}}\,dx$

Příklad

$\int \mathrm{tg} x\,dx$

Substituce v integrálech

Věta 9.9 (Substituce pro určitý integrál)
Jestliže $g' = g'(x)$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a funkce $f = f(t)$ je spojitá ve všech bodech $t = g(x)$, kde $x \in [a, b]$, potom platí

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt\;.$$

Schéma výpočtu

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dt = \left|\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \\ \frac{dt}{g'(x)} = dx \\ x = a \;\;\ldots t = g(a) \\ x = b \;\;\ldots t = g(b) \end{array}\right| = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \ldots$$

Příklad
$\int_1^e \frac{6\ln^2 x}{x}\,dx =$

Poznámka
Na rozdíl od neurčitého integrálu se k původní proměnné x již nevracíme.