Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

5. 12. 2016

Polynomy

Definice

Polynomem se rozumí funkce f definovaná na R vztahem

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

kde $m \in N \cup \{0\},\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m \in R$ se nazývají **koeficienty polynomu f**.
Je-li $a_m \neq 0$, řekneme, že polynom f je **m-tého stupně**.
Nulovému polynomu nepřiřazujeme stupeň.

Věta 9. 11.

Číslo $a \in R$ je kořenem polynomu f, právě když existuje polynom g takový, že pro každé $x \in R$ platí

$$f(x) = (x - a).g(x) \ .$$

Polynomy

Definice
Je-li číslo a kořenem polynomu f, pak lineární funkci $x - a$ nazveme **kořenový činitel** příslušný kořenu a.
Je-li k přirozené číslo, f polynom, $a \in R$, řekneme, že číslo a je **k-násobným kořenem polynomu f**, jestliže existuje polynom h takový

$$f(x) = (x - a)^k h(x)$$

pro všechna $x \in R$ a

$$h(a) \neq 0 \ .$$

Příklad
Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$.

Poznámka
Existují polynomy nenulového stupně, které nemají v R kořen.
(Např. $f(x) = x^2 + 1$)

Věta 9.12. (Základní věta algebry)
Polynom m-tého stupně má v množině $\mathbf{C}$ právě m kořenů, pokud každý kořen považujeme za tolik kořenů, jaká je jeho násobnost.

Důsledek (o kořenovém rozkladu v $\mathbf{C}$)
Každý polynom f m-tého stupně, $m \geq 1$, lze napsat ve tvaru

$$f(x) = a_m(x - c_1)^{\kappa_1}(x - c_2)^{\kappa_2} \ldots (x - c_r)^{\kappa_r} \ ,$$

kde $c_1, \ c_2, \ \ldots, \ c_r \in \mathbf{C}, \ r \leq m$ a $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r = m$.

Příklad
Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ a napište jeho kořenový rozklad na kořenové činitele v $\mathbf{C}$.

Věta 9.13. (o sdruženosti kořenů)
Má-li polynom s *reálnými koeficienty* v $\mathbf{C}$ k-násobný kořen a, pak má také k-násobný komplexně sdružený kořen $\overline{a}$.

Polynomy

Věta 9.14. (o kořenovém rozkladu v R)
Každý polynom s reálnými koeficienty $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ lze vyjádřit ve tvaru tzv. kořenového rozkladu

$$f(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r} \\ (x^2-\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\dots(x^2-\beta_s x+\gamma_s)^{l_s} \ ,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu f,
$k_1, \dots, k_r$ jsou jejich násobnosti,
$(x^2-\beta_j x+\gamma_j)$ pro $j = 1, \dots, s$ jsou kvadratické trojčleny, které nelze v R rozložit na součin lineárních členů $(D < 0)$.
Přitom platí

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_s) = m \quad \text{tj. stupeň } f(x)\ .$$

Racionální funkce

Definice.
Racionální funkcí $R(x)$ se nazývá podíl dvou polynomů, tj.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $Q(x)$ je nenulový polynom.
Je definována pro všechna x, pro která je $Q(x) \neq 0$.
Racionální funkci, u níž stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, nazýváme **ryze racionální funkcí** , v ostatních případech mluvíme o **neryze racionální funkci**.

Věta 9.15.
Neryze racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je buďto polynom, nebo ji lze zapsat ve tvaru součtu polynomu M a ryze racionální funkce $\frac{N(x)}{Q(x)}$, tj.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)} \ . \qquad (1)$$

Příklad
Vyjádřete racionální funkci $\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ ve tvaru (1).

Racionální funkce

Definice.
Parciálními zlomky nazýváme tyto dva druhy zlomků

$$\frac{A}{(x-r)^k}\,,$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

kde A, B, C, r, p, $q \in R$, $k \in \mathbf{N}$ a přitom musí být splněna podmínka $p^2 - 4q < 0$.

Věta 9.16. (o rozkladu na parciální zlomky)
Každou ryze racionální funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu parciálních zlomků.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

1. Polynom $Q(x)$ napíšeme ve tvaru kořenového rozkladu v R, tj.

$$Q(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}$$
$$(x^2-\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}\dots(x^2-\beta_s x+\gamma_s)^{l_s}\ ,$$

2. Každý člen $(x-r)^k$ přispívá do rozkladu těmito členy:

$$\frac{A_k}{(x-r)^k},\ \frac{A_{k-1}}{(x-r)^{k-1}},\ \dots\ ,\frac{A_1}{x-r},$$

kde čísla $A_1, \dots, A_k$ určíme později.

3. Každý člen $(x^2+px+q)^l$ přispívá do rozkladu těmito členy:

$$\frac{B_l x+C_l}{(x^2+px+q)^l},\ \frac{B_{l-1}x+C_{l-1}}{(x^2+px+q)^{l-1}},\ \dots,\frac{B_1 x+C_1}{x^2+px+q},$$

kde čísla $B_1, \dots, B_l,\ C_1, \dots, C_l$ určíme později.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

4. Napíšeme rovnost

$$\frac{N(x)}{Q(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{všechny série parciálních zlomků} \\ \text{určených z kořenového rozkladu} \end{array} \right\}$$

5. Předchozí rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)$, čímž získáme rovnost dvou polynomů

$$N(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{všechny série parciálních zlomků} \\ \text{určených z kořenového rozkladu} \end{array} \right\} .Q(x)$$

6. Konkrétní hodnoty A_k, B_l, C_l získáme tak, že porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně předchozích rovností
- metoda neurčitých koeficientů.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

Poznámka.
Bilanční rovnice pro porovnání koeficientů tvoří soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých. Takto vzniklá soustava má vždy právě jedno řešení.

Příklad
Rozložte na parciální zlomky ryze racionální funkci

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2} \ .$$

Postup integrování racionální funkce

1. Racionální funkci napíšeme v tzv. kanonickém tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

2. Polynom $P(x)$ dělíme se zbytkem polynomem $Q(x)$, tj.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $st\, N(x) < st\, Q(x)$.
Poznámka: Pokud $st\, P(x) < st\, Q(x)$ bod 2. přeskočíme.

3. Provedeme rozklad zbytku $\frac{N(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky.

4. Integrujeme postupně členy polynomu a jednotlivé parciální zlomky.

Postup integrování racionální funkce

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{(x-r)^k}\,dx =$$

$$\int \frac{Bx+c}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$\int \frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

Příklad

$$\int \frac{2x^3+2x^2+3x+2}{x^4+x^2}\,dx =$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2-x+1}\,dx =$$