Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

12. 12. 2016

Nevlastní integrál

Určitý integrál jsme definovali pro:

- konečný interval $[a, b]$, (tj. a, $b \in R$)
- omezenou funkci f, (tj. $|f(x)| < M$ na $[a, b]$).

Nyní rozšíříme definici určitého integrálu na:

- nekonečné intervaly $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$
- neomezené funkce.

Nevlastní integrál

Definice. (nevlastní integrál vlivem meze)
Předpokládáme, že funkce f je definována na intervalu $[a, \infty)$ a integrovatelná na každém intervalu $[a, r]$ pro libovolné $r > a$, potom definujeme **nevlastní integrál funkce f na intervalu $[a, \infty)$** jako limitu

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)\,dx \ . \tag{1}$$

Jestliže tato limita je reálné číslo, říkáme, že **nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,dx$** konverguje (k tomuto číslu).
Jestliže limita neexistuje, nebo je $\pm\infty$, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.
Analogicky definujeme **nevlastní integrál funkce f na intervalu $(-\infty, a]$** jako limitu

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{r \to -\infty} \int_r^a f(x)\,dx \ . \tag{2}$$

Pomocí nevlastních integrálů (1) a (2) definujeme **nevlastní integrál funkce f na intervalu $(-\infty, \infty)$** takto:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \ , \tag{3}$$

kde $a \in R$ libovolné.

Nevlastní integrál

Příklad
Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Příklad
Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

Příklad
Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Poznámka
Geometrická interpretace konvergentního nevlastního integrálu opět vyjadřuje obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f, osou x a přímkou $a = x$.

Věta 10.1. (srovnávací kriterium pro určení konvergence nevlastního integrálu)
Platí-li pro dvě funkce f a g na intervalu $[a, \infty)$ nerovnost

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

potom z konvergence $\int_a^\infty g(x)\,dx$ vyplývá konvergence $\int_a^\infty f(x)\,dx$
a z divergence $\int_a^\infty f(x)\,dx$ vyplývá divergence $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

Nevlastní integrál

Definice (nevlastní integrál vlivem funkce)
Předpokládáme, že funkce f, definovaná na intervalu $[a, b)$, je neomezená v okolí meze b a integrovatelná na každém intervalu $[a, r]$, kde $r < b$, potom definujeme **nevlastní integrál neomezené funkce f na intervalu $[a, b]$** jako limitu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)\,dx \,.$$

Je-li tato limita reálné číslo, říkáme, že **nevlastní integrál konverguje** (k tomuto číslu). Jestliže limita neexistuje, nebo je $\pm\infty$, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.
Analogicky definujeme nevlastní integrál funkce f neomezené v okolí dolní meze a jako limitu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx \,.$$

Nevlastní integrál

Jestliže je funkce f neomezená v okolí bodu c ležícího uvnitř intervalu $[a,b]$ a je v částečných intervalech $[a,c),\ (c,b]$ integrovatelná, vyjádříme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ ve tvaru součtu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Jeho konvergence je podmíněna konvergencí obou nevlastních integrálů na pravé straně.

Nevlastní integrál

Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx$$

Poznámka

Podobně jako u nevlastního integrálu vlivem meze je i zde možno považovat za obsah ohraničeného obrazce (grafem f, osou x a přímkami $x = a,\ x = b$).
Platí zde analogie srovnávacího kriteria pro určení konvergence nevlastního integrálu.