Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

2. 1. 2017

Aplikace určitého integrálu

Způsoby zadání křivky v rovině
a) Spojitou funkcí
Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x)\ , \quad x \in [a, b]\ ,$$

kde f je spojitá funkce.
(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Příklad
1)

$$y = \sin x\ , \quad x \in [0, \pi]\ ,$$

2)

$$y = e^x\ , \qquad x \in [0, 1]\ .$$

b) Parametrickými rovnicemi
Křivka je zadána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x(t)\,, \\ y &= y(t)\,, \end{aligned} \qquad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kde $x(t),\ y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Příklad
Přímka

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t\,, \\ y &= 1 - t\,, \end{aligned} \qquad t \in R\,.$$

Kružnice

$$\begin{aligned} x &= a\cos t\,, \\ y &= a\sin t\,, \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Elipsa

$$\begin{aligned} x &= a\cos t\,, \\ y &= b\sin t\,, \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojité funkce $f(x),\ x \in [a,b]$ je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\ . \tag{1}$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Poznámka

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a rovnoběžkami $x = a,\ x = b$, přičemž pro $x \in [a,b]$ je $f_2(x) \leq f_1(x)$ je

$$P = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx\ .$$

Příklad

Určete obsah obrazce ohraničeného křikami $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$ a obrazec nakreslete.

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x),\ x \in [a,b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \qquad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

kde funkce $x = x(t)$ má nenulovou spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, můžeme obsah vyjádřit ve tvaru

$$P = \int_\alpha^\beta y(t)|x'(t)|\,dt\ .$$

(vzorec dostaneme substitucí $x = x(t),\ f(x(t)) = y(t)$ z integrálu (1))

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky
a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f', potom délku křivky vypočítáme ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \ .$$

Příklad
Určete délku grafu funkce $y = \sqrt{x^3}, \ \ x \in [0, 2]$.
$(\frac{8}{27}(5,5\sqrt{5,5} - 1))$

Příklad
Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t),\ y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$, pak je délka křivky dána vzorcem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

Příklad
Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Objem rotačního tělesa
a) Uvažujme rovinný obrazec $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\ .$$

Příklad
Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod grafem funkce $f(x) = \sqrt{x},\quad x \in [0,1]$ kolem osy x.

Příklad
Určete objem koule o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se spojitou funkcí f. Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y, se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte podle vzorce

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx\ .$$

Příklad

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce mezi grafem funkce $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1]$ a osou y kolem osy y.

Příklad

Určete objem polokoule o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Obsah rotační plochy

a) Křivka $y = f(x),\ a \leq x \leq b,\ f(x) > 0$ rotuje kolem osy x. Obsah vzniklé rotační plochy vypočteme podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ .$$

Příklad

Určete obsah sféry (povrch koule) o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

b) Křivka $y = f(x),\ 0 \le a \le x \le b$ rotuje kolem osy y. Obsah vzniklé rotační plochy vypočteme podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\ .$$

Příklad

Určete povrch paraboloidu, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 1]$ kolem osy y.

Příklad

Určete obsah horní poloviny sféry o poloměru R.

Těžiště plochy
Je dán křivočarý lichoběžník $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$.
Pak můžeme vypočíst **statický moment plochy vzhledem k ose** x

$$S_X = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx\ ,$$

statický moment plochy vzhledem k ose y

$$S_Y = \int_a^b x f(x)\,dx$$

a souřadnice těžiště plochy $T = [x_T, y_T]$

$$x_T = \frac{S_Y}{P}, \qquad y_T = \frac{S_X}{P},$$

kde P označuje obsah dané plochy.

Příklad
Určete polohu těžiště půlkruhu o poloměru R.

Aplikace určitého integrálu

Těžiště křivky

Je dána křivka $y = f(x), x \in [a, b]$.

Pak můžeme vypočíst **statický moment křivky vzhledem k ose** x

$$S_X = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ ,$$

statický moment křivky vzhledem k ose y

$$S_Y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

a souřadnice těžiště křivky $T = [x_T, y_T]$

$$x_T = \frac{S_Y}{l}, \qquad y_T = \frac{S_X}{l},$$

kde l označuje délku dané křivky.

Příklad

Určete polohu těžiště půlkružnice o poloměru R.