Matematika 1B (KMD/M1B-P) - cvičení 10

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2014/2015 a vyšší)

Příklad 1. Nalezněte obecné řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, je-li:

a) $y'' - y = \dfrac{x}{e^x}$, $\quad \left[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{4}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

b) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos(2x)}$, $\quad \left[y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \dfrac{1}{4} \ln|\cos(2x)| \cdot \cos(2x) + \dfrac{x}{2} \sin(2x)\right]$

c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$, $\quad \left[y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \dfrac{4}{5} e^{-x}(x+1)^{5/2}\right]$

d) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}$, $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - e^{-2x}(\ln|x| - 1)\right]$

e) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $\quad \left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{5} e^{4x}\right]$

f) $y'' - y' - 2y = x^2 + x$, $\quad \left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\right]$

g) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$, $\quad \left[y = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \sin(2x) + \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{1}{10}\sin x\right]$

h) $y''' + y'' = x$, $\quad \left[y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3\right]$

i) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$, $\quad \left[y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \dfrac{1}{2} x e^x \sin x\right]$

j) $y'' - y' = 3x^2 e^x$, $\quad \left[y = C_1 + C_2 e^x + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x)\right]$

k) $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$, $\quad \left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\dfrac{3}{10}x + \dfrac{17}{50}\right)\cos x + \left(\dfrac{1}{10}x + \dfrac{3}{25}\right)\sin x\right]$

Příklad 2. Nalezněte partikulární řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic vázané příslušnými počátečními podmínkami, je-li:

a) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ $\quad \left[y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - xe^{2x} + e^{2x}\right]$

b) $y'' + 3y' + 2y = (6x - 1)e^x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$ $\quad \left[y = (x-1)e^x + e^{-x} - e^{-2x}\right]$

c) $y'' + 2y' + y = 2\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $\quad \left[y = e^{-x} + \sin x\right]$

d) $y'' - 2y' - 3y = 15\sin(3x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $\quad \left[y = \dfrac{7}{8}e^{3x} - \dfrac{11}{8}e^{-x} + \dfrac{1}{2}\cos(3x) - \sin(3x)\right]$

e) $y'' - 5y' + 4y = e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ $\quad \left[y = \dfrac{1}{9}e^x - \dfrac{1}{9}e^{4x} + \dfrac{1}{3}xe^x\right]$