Matematika 1B (KMD/M1B-P) - cvičení 3

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2014/2015 a vyšší)

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y)=\frac{\pi}{3}x^2y,\ A=[4,6],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2\pi}{3}xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\pi}{3}x^2\right]$

b) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ A=[1,1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right]$

c) $f(x,y)=x^2y+\frac{y^3}{x^4},\ A=[1,1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-\frac{4y^3}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\frac{3y^2}{x^4}\right]$

d) $f(x,y)=x\sin^2 y,\ A=[1,\pi],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\sin^2 y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x\sin y\cos y\right]$

e) $f(x,y)=e^x\sin(2y),\ A=[0,0],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\sin(2y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=2e^x\cos(2y)\right]$

f) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y},\ A=[1,0],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right]$

g) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y},\ A=[1,-1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\right]$

h) $f(x,y)=x^y,\ A=[2,-1],$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x\right]$

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y,z)=2x^2yz+3xy^2+6xz-5,\ A=[1,-1,2],$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}=4xyz+3y^2+6z,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2z+6xy,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2x2y+6x\right]$$

b) $f(x,y,z)=\cos(3x-5y+6z-2),\ A=[0,\pi,2],$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}=-3\sin(3x-5y+6z-2),\ \frac{\partial f}{\partial y}=5\sin(3x-5y+6z-2),\ \frac{\partial f}{\partial z}=-6\sin(3x-5y+6z-2)\right]$$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ A=[1,-1,2],$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

d) $f(x,y,z)=x^2y^2\sqrt{z}+\frac{y^2}{x^4},\ A=[-1,-1,1],$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2\sqrt{z}-\frac{4y^2}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y\sqrt{z}+\frac{2y}{x^4},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}\right]$$

Příklad 3. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y,z,u)=\ln(x^2+y^2+z^2+u^2),\ A=[3,2,1,0],$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+u^2},\ \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u}{x^2+y^2+z^2+u^2}\right]$$

Příklad 4. Jaký úhel svírá tečna průsečnice plochy $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ s rovinou $y=1$ v bodě $T=[1,1,\sqrt{3}]$ s kladnou poloosou x? $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

Příklad 5. Jaký úhel svírá tečna průsečnice plochy $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ s rovinou $x=1$ v bodě $T=[1,1,\sqrt{3}]$ s kladnou poloosou y? $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

Příklad 6. Určete odchylku tečen sestrojených v bodech $T_1=[1,-2,5]$ a $T_2=[-3,-2,13]$ k průsečnici rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$ s rovinou $y=-2$. $\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{8}{11}\right)\right]$