Matematika 1B (KMD/M1B-P) - cvičení 4

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2014/2015 a vyšší)

Příklad 1. Určete vektor grad f v obecném bodě a v daných bodech:

a) $f(x,y) = 4xy^2 - 6xy + 5,\ A = [1,-1],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = (4y^2 - 6y;\, 8xy - 6x)\right]$

b) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y-5}{x-y+2},\ A = [2,0],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{9-5y}{(x-y+2)^2};\, \dfrac{5x+1}{(x-y+2)^2}\right)\right]$

c) $f(x,y) = \ln(e^x + 2x - 3y),\ A = [1,-1],$ $\qquad \left[\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{e^x+2}{e^x+2x-3y};\, \dfrac{-3}{e^x+2x-3y}\right)\right]$

Příklad 2. Určete, ve kterých bodech je vektor grad f nulový:

a) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 6x + 5y,$ $\qquad [[1;0]]$

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + 2x + y^2 - 4xy + 4y + 6),$ $\qquad \left[\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right]\right]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4},$ $\qquad [\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0;0)\ \forall\, [x;y] \in D_f]$

Příklad 3. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $T = [x_T, y_T, f(x_T, y_T)]$, je-li:

a) $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10,\ T = [1,-1,?],$ $\qquad [12x - 7y - z - 10 = 0]$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y},\ T = [1,1,?],$ $\qquad [x - y - z + 1 = 0]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ T = [4,-3,?],$ $\qquad [4x - 3y - 5z = 0]$

d) $f(x,y) = 2x^2 + y^2,\ T = [1,1,?],$ $\qquad [4x + 2y - z - 3 = 0]$

e) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y},\ T = [1,1,?],$ $\qquad [2x - 2y + 4z - \pi = 0;]$

f) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x,\ T = [1,?,2],$ $\qquad [5x + y - z - 3 = 0]$

g) $f(x,y) = xy,\ T = [?,2,2],$ $\qquad [2x + y - z - 2 = 0]$

Příklad 4. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je rovnobežná s rovinou ρ, je-li:

a) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 5,\ \rho : 4x - 12y + z = 3,$ $\qquad [4x - 12y + z + 5 = 0]$

b) $f(x,y) = 2x^2y + 5,\ \rho : 8x + 2y - z = 0,$ $\qquad [8x + 2y - z - 3 = 0,\ 8x + 2y - z + 13 = 0]$

Příklad 5. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je kolmá na přímku p, je-li:

$f(x,y) = xy,\ p : X = [-2,-2,1] + t(2,1,-1),$ $\qquad [4x - 12y + z + 5 = 0]$

Příklad 6. Vypočtete první parciální derivace složených funkcí:

a) $F(x,y) = f(u,v),\ u = x^2 + y,\ v = x - y,$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

b) $F(x,y) = f(u,v),\ u = xy,\ v = \dfrac{x}{y},$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,y + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{y},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,x + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{-x}{y^2}\right)\right]$$

c) $F(x,y) = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2},$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},\ \frac{\partial F}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}\right]$$