Matematika 1B (KMD/M1B-P) - cvičení 5

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2014/2015 a vyšší)

Příklad 1. Najděte totální diferenciál $\mathrm{d}f_A(x,y)$ v příslušném bodě A pro následující funkce:

a) $f(x,y)=e^{-x}\cos y,\ A=[1;\pi],$ $\left[\mathrm{d}f_A(x,y)=\dfrac{1}{e}(x-1)\right]$

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ A=[2;0],$ $[\mathrm{d}f_A(x,y)=x-2]$

c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(xy),\ A=[1;0],$ $[\mathrm{d}f_A(x,y)=-y]$

d) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ A=[1;-1],$ $\left[\mathrm{d}f_A(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt{8}}\,x+\dfrac{1}{\sqrt{8}}\,y+\dfrac{2}{\sqrt{8}}\right]$

Příklad 2. Určete hodnotu směrové derivace $\partial_{\vec{u}}f$ v bodě $[1,1]$ pro obecný vektor $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\|\vec{u}\|=1$:

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3},$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}(u_1+u_2)\right]$ b) $f(x,y)=\sqrt{|xy|},$ $[]$

Příklad 3. Určete, zda funkce $f(x,y)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$ roste či klesá a určete rychlost změny, je-li

a) $f(x,y)=\ln(x^2y+1),\ A=[1;2],\ \vec{u}=(1;-1),$ $\left[\text{roste rychlostí } \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

b) $f(x,y)=x^2-2y^2,\ A=[3;4],\ \vec{u}=(1;1),$ $\left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-10}{\sqrt{2}}\right]$

c) $f(x,y)=\dfrac{2x+3y-5}{x-y+2},\ A=[2;0],\ \vec{u}=(2;-3),$ $\left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-15}{16\sqrt{13}}\right]$

Příklad 4. Pro funkci $f(x,y)$ určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce v bodě A nejvíce roste a určete rychlost růstu, je-li

a) $f(x,y)=2x^2-3y+5,\ A=[1;2],$ $\left[\vec{s}=\dfrac{1}{5}(4;-3),\ \text{rychlost je } 5\right]$

b) $f(x,y)=e^{x^2-y},\ A=[1;-1],$ $\left[\vec{s}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;-1),\ \text{rychlost je } e^2\sqrt{5}\right]$

c) $f(x,y)=\arcsin(2x+y),\ A=\left[\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right]$ $\left[\vec{s}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;1),\ \text{rychlost je } 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$

Příklad 5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v obecném bodě a vyčíslete je v daných bodech:

a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ A=[1;0],$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y},\ A=[-2;3],$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-y}{\sqrt{(x^2-y)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{(x^2-y)^3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-1}{4\sqrt{(x^2-y)^3}}\right]$$

c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(xy),\ A=[1;-1],$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}\right]$$

Příklad 6. Najděte diferenciál druhého řádu $\mathrm{d}^2f_A(x,y)$ v příslušném bodě A pro následující funkce:

a) $f(x,y)=x^2y+\ln(x+2y+1),\ A=[0;0],$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y-\frac{1}{(x+2y+1)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-4}{(x+2y+1)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x-\frac{2}{(x+2y+1)^2},\ \mathrm{d}^2f_A(x,y)=-x^2-4xy-4y^2\right]$$