Matematika 1B.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Diferenciální počet funkce více proměnných

Definice.

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \dots, x_n$ za jeho souřadnice).

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Diferenciální počet funkce více proměnných

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X, Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X,Y)$ předpisem

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X,Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X, Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2$,

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \dots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \dots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X, Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2,\ n = 3.$

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X,Y)$ předpisem

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X,Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2,\ n = 3.$

Definice. (n-rozměrný euklidovský prostor)

Diferenciální počet funkce více proměnných

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X, Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2,\ n = 3.$

Definice. (n-rozměrný euklidovský prostor)
n-rozměrný prostor spolu se vzdáleností d

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X, Y)$ předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X, Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2,\ n = 3.$

Definice. (n-rozměrný euklidovský prostor)
n-rozměrný prostor spolu se vzdáleností d se nazývá n-rozměrný euklidovský prostor

Definice.
Množinu všech uspořádaných n-tic čísel se nazývá n-rozměrný prostor a každá z n-tic se prohlásí za bod n-rozměrného prostoru
(čísla $x_1, \ldots, x_n$ za jeho souřadnice).
značíme: $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Definice. (Vzdálenost bodů)
Každé dvojici bodů X, Y přiřadíme číslo $d(X,Y)$ předpisem

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Číslo $d(X,Y)$ nazýváme vzdálenost bodů X, Y.

Příklad.
$n = 2,\ n = 3.$

Definice. (n-rozměrný euklidovský prostor)
n-rozměrný prostor spolu se vzdáleností d se nazývá n-rozměrný euklidovský prostor a značí se $\boldsymbol{E}_n$.

Diferenciální počet funkce více proměnných

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X, Z) \le d(X, Y) + d(Y, Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)

Diferenciální počet funkce více proměnných

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$,

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.
2) $d(X,Y)=d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y\in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z\in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n\in \boldsymbol{N}$ a $M\subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X\in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.
2) $d(X,Y)=d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y)+d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f. (tj. $H(f) \subset \boldsymbol{R}$).

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.
2) $d(X,Y)=d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y\in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z\in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n\in \boldsymbol{N}$ a $M\subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X\in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f. (tj. $H(f)\subset \boldsymbol{R}$).
Pro libovolný bod $X=[x_1,\dots,x_n]\in D(f)$,

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.
2) $d(X,Y)=d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z)\le d(X,Y)+d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f. (tj. $H(f) \subset \boldsymbol{R}$).
Pro libovolný bod $X=[x_1,\dots,x_n] \in D(f)$, nazýváme x_k hodnotou k-té nezávislé proměnné pro $k=1,\dots,n$.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y) = 0$, právě když $X = Y$.
2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f. (tj. $H(f) \subset \boldsymbol{R}$).
Pro libovolný bod $X = [x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$, nazýváme x_k hodnotou k-té nezávislé proměnné pro $k = 1, \ldots, n$.
Libovolné $y \in H(f)$ nazýváme hodnotou závisle proměnné funkce f.

Věta. (základní vlastnosti vzdálenosti)
Vzdálenost d má tyto vlastnosti:
1) $d(X,Y)=0$, právě když $X=Y$.
2) $d(X,Y)=d(Y,X)$ pro libovolné X, $Y \in \boldsymbol{E}_n$.
3) $d(X,Z) \leq d(X,Y)+d(Y,Z)$ pro libovolné X, Y, $Z \in \boldsymbol{E}_n$.
(trojúhelníková nerovnost).

Definice. (Funkce n-proměnných)
Předpokládáme, že $n \in \boldsymbol{N}$ a $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Funkcí n-proměnných se rozumí zobrazení f množiny M do množiny $\boldsymbol{R}$, tj. předpis, který každému bodu $X \in M$ přiřazuje jediné reálné číslo y.

Označení
$D(f)$ značí definiční obor funkce f. (tj. množina M).
$H(f)$ značí obor hodnot funkce f. (tj. $H(f) \subset \boldsymbol{R}$).
Pro libovolný bod $X=[x_1,\ldots,x_n] \in D(f)$, nazýváme x_k hodnotou k-té nezávislé proměnné pro $k=1,\ldots,n$.
Libovolné $y \in H(f)$ nazýváme hodnotou závisle proměnné funkce f.
Hodnotu funkce f n proměnných v bodě $X=[x_1,\ldots,x_n] \in D(f)$ značíme $f(X)$ nebo $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Příklad.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$,

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$,

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor,

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$,

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů
$[x_1, \ldots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ takových, že $[x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ takových, že $[x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$ a $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů $[x_1, \dots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ takových, že $[x_1, \dots, x_n] \in D(f)$ a $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Příklad. $n = 2$

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ takových, že $[x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$ a $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad. $n = 2$
Graf je množina $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ takových, že

Příklad.
Funkce f tří proměnných, která každému $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ přiřazuje číslo $x + y + 3z$.
$D(f) = \boldsymbol{E}_3$, $H(f) = \boldsymbol{R}$, funkční předpis $f(x, y, z) = x + y + 3z$.

Poznámka
Není-li pro funkci f n proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů $X \in \boldsymbol{E}_n$, pro něž má výraz $f(X)$ smysl.

Příklad.
Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$.

Definice. (Graf funkce)
Graf funkce f n proměnných je definován jako množina všech bodů $[x_1, \ldots, x_n, y] \in \boldsymbol{E}_{n+1}$ takových, že $[x_1, \ldots, x_n] \in D(f)$ a $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad. $n = 2$
Graf je množina $[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3$ takových, že $[x, y] \in D(f)$ a $z = f(x, y)$.

Poznámka.

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$,

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.
Sestrojte graf funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Poznámka.
Protože každému $[x,y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.
Sestrojte graf funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

definované na množině $\boldsymbol{E}_2$.

Diferenciální počet funkce více proměnných

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.
Sestrojte graf funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

definované na množině $\boldsymbol{E}_2$.

$$G(f) = \{[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3;\ z = x^2 + y^2\}$$

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.
Sestrojte graf funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

definované na množině $\boldsymbol{E}_2$.

$$G(f) = \{[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3;\ z = x^2 + y^2\}$$

$h(f) =< 0, \infty)$.

Poznámka.
Protože každému $[x, y] \in D(f)$ přísluší jediné $z \in H(f)$, nemůže mít graf funkce f dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou z dva nebo více společných bodů.
(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

Příklad.
Sestrojte graf funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

definované na množině $\boldsymbol{E}_2$.

$$G(f) = \{[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3;\ z = x^2 + y^2\}$$

$h(f) =< 0, \infty)$.
(rotační paraboloid s vrcholem v počátku)

Poznámka.

Poznámka.

Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru
$\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\; f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\; f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\alpha = 1$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru
$\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\alpha = 1 \quad \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\}$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\alpha = 1 \quad \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\alpha = 1$ $\quad \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\}$
$\qquad\qquad \mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.
$\alpha = 4$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\alpha = 1$ $\mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\}$
$\mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.
$\alpha = 4$ $\mathcal{H}_4 = \{[x, y, 4] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4\}$

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\alpha = 1$ $\mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\}$
$\mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.
$\alpha = 4$ $\mathcal{H}_4 = \{[x, y, 4] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4\}$
$\mathcal{V}_4 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4\}$.

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \quad & \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\} \\ & \mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}. \\ \alpha = 4 \quad & \mathcal{H}_4 = \{[x, y, 4] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4\} \\ & \mathcal{V}_4 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4\}. \end{aligned}$$

Poznámka.

Poznámka.
Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ tzv. hladinu funkce f jako množinu $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \boldsymbol{E}_{n+1};\ f(X) = \alpha\}$.
Tím je také tomuto číslu α přiřazena podmnožina definičního oboru $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f);\ f(X) = \alpha\}$ tzv. vrstevnice funkce f.

Příklad.
Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 \quad & \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 1\} \\
& \mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1\}. \\
\alpha = 4 \quad & \mathcal{H}_4 = \{[x, y, 4] \in \boldsymbol{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4\} \\
& \mathcal{V}_4 = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4\}.
\end{aligned}$$

Poznámka.
V praxi se často setkáváme se situací, že funkční přiřazení není zadáno výrazem (nebo několika výrazy), nýbrž tabulkou funkčních hodnot.

Definice. (Operace s funkcemi)

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny,

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X).g(X)$,

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X).g(X)$,
podíl $\frac{f}{g}$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X).g(X)$,
podíl $\frac{f}{g}$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$,

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X).g(X)$,
podíl $\frac{f}{g}$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$,
ve všech čtyřech případech je funkce h definována pro každý X, pro nějž příslušný výraz existuje.

Definice. (Operace s funkcemi)
Řekneme, že funkce f a g n proměnných jsou si rovny, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každý bod $X \in D(f)$ je $f(X) = g(X)$.
Jsou-li f a g funkce n proměnných, definujeme:
Součet $f + g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) + g(X)$,
rozdíl $f - g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X) - g(X)$,
součin $f.g$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = f(X).g(X)$,
podíl $\frac{f}{g}$ je funkce h n proměnných definovaná vztahem $h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$,
ve všech čtyřech případech je funkce h definována pro každý X, pro nějž příslušný výraz existuje.
Nulovým bodem (kořenem) funkce f n proměnných nazveme každý bod z $D(f)$, v němž funkce f nabývá hodnoty nula.

Definice. (Složená funkce)

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \ldots, g_p$ je p funkcí n proměnných.

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \ldots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \ldots, g_p$

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \dots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \dots, g_p$ a s vnější složkou h

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \ldots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \ldots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \dots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \dots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \cdots \cap D(g_p); [g_1(X), \dots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \dots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \dots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \dots \cap D(g_p); [g_1(X), \dots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

a funkční předpis

$$f(X) = h(g_1(X), g_2(X), \dots, g_p(X)) \ .$$

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \ldots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \ldots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \cdots \cap D(g_p); [g_1(X), \ldots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

a funkční předpis

$$f(X) = h(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_p(X)) \ .$$

Poznámka.

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \ldots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \ldots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \cdots \cap D(g_p); [g_1(X), \ldots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

a funkční předpis

$$f(X) = h(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_p(X)) \; .$$

Poznámka.
Složená funkce f je funkcí n proměnných

Definice. (Složená funkce)
Nechť h je funkce p proměnných a $g_1, \dots, g_p$ je p funkcí n proměnných. Složená funkce f s vnitřními složkami $g_1, \dots, g_p$ a s vnější složkou h má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \cdots \cap D(g_p); [g_1(X), \dots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

a funkční předpis

$$f(X) = h(g_1(X), g_2(X), \dots, g_p(X)) \ .$$

Poznámka.
Složená funkce f je funkcí n proměnných (tedy tolika proměnných, kolik jich mají vnitřní složky).

Příklad.

Příklad.
Je dána funkce $h(x, y, z) = e^{xy} \text{arcsin} z$

Příklad.

Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem
$D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$

Příklad.
Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem $D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y}$$

Příklad.
Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem $D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1-x\}$$

Příklad.
Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem
$D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y}$ s $D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1-x\}$

$g_2(x,y) = \sqrt{y+1}$

Příklad.
Je dána funkce $h(x, y, z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem
$D(h) = \{[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$$g_1(x, y) = \sqrt{1 - x - y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1 - x\}$$
$$g_2(x, y) = \sqrt{y + 1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \geq -1\}$$

Příklad.

Je dána funkce $h(x,y,z)=e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem $D(h)=\{[x,y,z]\in \boldsymbol{E}_3;\ -1\le z\le 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y)=\sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1)=\{[x,y]\in \boldsymbol{E}_2;\ y\le 1-x\}$$
$$g_2(x,y)=\sqrt{y+1} \quad \text{s} \quad D(g_2)=\{[x,y]\in \boldsymbol{E}_2;\ y\ge -1\}$$
$$g_3(x,y)=\sqrt{1+x-y}$$

Příklad.

Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem $D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1-x\}$$
$$g_2(x,y) = \sqrt{y+1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \geq -1\}$$
$$g_3(x,y) = \sqrt{1+x-y} \quad \text{s} \quad D(g_3) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1+x\}$$

Příklad.
Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin} z$ s definičním oborem
$D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \le z \le 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \le 1-x\}$$
$$g_2(x,y) = \sqrt{y+1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \ge -1\}$$
$$g_3(x,y) = \sqrt{1+x-y} \quad \text{s} \quad D(g_3) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \le 1+x\}$$

Sestrojte funkci

$$f = h(g_1, g_2, g_3).$$

Příklad.
Je dána funkce $h(x, y, z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem
$D(h) = \{[x, y, z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$g_1(x, y) = \sqrt{1 - x - y}$ s $D(g_1) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1 - x\}$
$g_2(x, y) = \sqrt{y + 1}$ s $D(g_2) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \geq -1\}$
$g_3(x, y) = \sqrt{1 + x - y}$ s $D(g_3) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1 + x\}$

Sestrojte funkci

$f = h(g_1, g_2, g_3).$

$D(f) = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; y \leq 1 - x,\ y \geq -1,\ y \leq 1 + x,\ y \geq x\}$

Příklad.

Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin} z$ s definičním oborem $D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \le z \le 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \le 1-x\}$$
$$g_2(x,y) = \sqrt{y+1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \ge -1\}$$
$$g_3(x,y) = \sqrt{1+x-y} \quad \text{s} \quad D(g_3) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \le 1+x\}$$

Sestrojte funkci

$$f = h(g_1, g_2, g_3).$$

$$D(f) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2; y \le 1-x,\ y \ge -1,\ y \le 1+x,\ y \ge x\}$$

$$f(x,y) = h(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) =$$

Příklad.

Je dána funkce $h(x,y,z) = e^{xy}\text{arcsin}z$ s definičním oborem $D(h) = \{[x,y,z] \in \boldsymbol{E}_3;\ -1 \leq z \leq 1\}$ a funkce

$$g_1(x,y) = \sqrt{1-x-y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1-x\}$$
$$g_2(x,y) = \sqrt{y+1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \geq -1\}$$
$$g_3(x,y) = \sqrt{1+x-y} \quad \text{s} \quad D(g_3) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2;\ y \leq 1+x\}$$

Sestrojte funkci

$$f = h(g_1, g_2, g_3).$$

$$D(f) = \{[x,y] \in \boldsymbol{E}_2; y \leq 1-x,\ y \geq -1,\ y \leq 1+x,\ y \geq x\}$$

$$f(x,y) = h(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) =$$

$$= e^{\sqrt{1-x-y}\sqrt{y+1}}\text{arcsin}\sqrt{1+x-y}\ .$$

Definice.

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená,

Diferenciální počet funkce více proměnných

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\, M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená,

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\, M > 0\, \forall X \in D(f) \ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\quad |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Příklad.

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Příklad.
$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad D(f) = \boldsymbol{E}_n.$

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Příklad.
$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad D(f) = \boldsymbol{E}_n.$
je zdola omezená

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Příklad.
$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad D(f) = \boldsymbol{E}_n.$
je zdola omezená $M = 0$

Diferenciální počet funkce více proměnných

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je omezená, jestliže její obor hodnot je omezená množina.
tj. $\exists\ M > 0\ \forall X \in D(f)\ \ |f(X)| \leq M$
Řekneme, že funkce f n proměnných je shora omezená, resp. zdola omezená, jestliže její obor hodnot je shora omezená, resp. zdola omezená, množina.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \leq M$,
resp.
tj. $\exists\ \ M > 0\ \ \forall X \in D(f)\ \ f(X) \geq -M$.

Příklad.
$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad D(f) = \boldsymbol{E}_n.$
je zdola omezená $M = 0$
neni shora omezená.

Definice

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n,\ \delta > 0.$

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n, \ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n, \ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n,\ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n;\ d(A, X) < \delta\}$$

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n, \ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n; \ d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do δ-okolí bodu A patří právě všechny body z $\boldsymbol{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ.)

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n,\ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n;\ d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do δ-okolí bodu A patří právě všechny body z $\boldsymbol{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ.)

Příklad.

Definice
Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n, \ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n; \ d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do δ-okolí bodu A patří právě všechny body z $\boldsymbol{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ.)

Příklad.
$n = 1$, pak δ-okolím bodu A je interval $(A - \delta, A + \delta)$.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n,\ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n;\ d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do δ-okolí bodu A patří právě všechny body z $\boldsymbol{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ.)

Příklad.

$n = 1$, pak δ-okolím bodu A je interval $(A - \delta, A + \delta)$.
$n = 2$, pak δ-okolím bodu A je množina všech bodů ležících uvnitř kruhu se středem v A a poloměrem δ.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in \boldsymbol{E}_n,\ \delta > 0$. Okolím bodu A s poloměrem δ (nebo δ-okolím bodu A) se rozumí množina

$$\{X \in \boldsymbol{E}_n;\ d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do δ-okolí bodu A patří právě všechny body z $\boldsymbol{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ.)

Příklad.

$n = 1$, pak δ-okolím bodu A je interval $(A - \delta, A + \delta)$.
$n = 2$, pak δ-okolím bodu A je množina všech bodů ležících uvnitř kruhu se středem v A a poloměrem δ.
$n = 3$, pak δ-okolím bodu A je množina všech bodů ležících uvnitř koule se středem v A a poloměrem δ.

Definice.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n,$

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M,

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A, které je podmnožinou M.

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A, které je podmnožinou M.
Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá otevřená.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A, které je podmnožinou M.
Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá otevřená.

Příklad.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A, které je podmnožinou M.
Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá otevřená.

Příklad.
$M = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$ nebo $x = y = 2\}$

Definice.
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$, řekneme, že A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A, které je podmnožinou M.
Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá otevřená.

Příklad.
$M = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$ nebo $x = y = 2\}$

vnitřní body $\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

Definice

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M,

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.

Definice

Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená,

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Definice
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Příklad.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Příklad.

$M = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$ nebo $x = y = 2\}$

Definice
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Příklad.
$M = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$ nebo $x = y = 2\}$

hraniční body $\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;$

$$\begin{aligned} &(x = 0 \ \vee \ x = 1) \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1 \vee \\ \vee\ &(y = 0 \ \vee \ y = 1) \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1 \vee \\ \vee\ &x = y = 2\}. \end{aligned}$$

Definice
Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_n, A \in \boldsymbol{E}_n$ a obsahuje-li každé okolí bodu A nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do M, řekneme, že A je hraniční bod množiny M.
Množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Příklad.
$M = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$ nebo $x = y = 2\}$

hraniční body $\{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2;$

$$
\begin{aligned}
&(x = 0 \ \vee\ x = 1) \ \wedge\ 0 \le y \le 1 \ \vee \\
\vee\ &(y = 0 \ \vee\ y = 1) \ \wedge\ 0 \le x \le 1 \ \vee \\
\vee\ &x = y = 2\}.
\end{aligned}
$$

uzavřená množina $\overline{M} = \{[x, y] \in \boldsymbol{E}_2; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ nebo $x = y = 2\}$.