Matematika 1B.
ŘADY

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Číselné řady

Číselné řady

Definice

Číselné řady

Definice
Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \qquad (1)$$

nazýváme (nekonečnou) (číselnou) **řadou**, čísla $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ **členy této řady**.

Číselné řady

Definice

Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \tag{1}$$

nazýváme (nekonečnou) (číselnou) **řadou**, čísla $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ **členy této řady**.
Posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$,

Číselné řady

Definice
Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \tag{1}$$

nazýváme (nekonečnou) (číselnou) **řadou**, čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **členy této řady**.
Posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$,

Číselné řady

Definice
Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \tag{1}$$

nazýváme (nekonečnou) (číselnou) **řadou**, čísla $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ **členy této řady**.
Posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$, nazýváme **posloupností částečných součtů** řady (1).

Číselné řady

V případě, že

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje**

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)**

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty \ ;$$

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty \ ;$$

$\lim s_k = -\infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k $-\infty$)**

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty \ ;$$

$\lim s_k = -\infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k $-\infty$)** a má součet

$$s = -\infty \ ;$$

Číselné řady

V případě, že

$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty \ ;$$

$\lim s_k = -\infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k $-\infty$)** a má součet

$$s = -\infty \ ;$$

$\lim s_k$ neexistuje, říkáme, že řada (1) **diverguje (osciluje)**

Číselné řady

V případě, že
$\lim s_k = s \in R$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty \ ;$$

$\lim s_k = -\infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k $-\infty$)** a má součet

$$s = -\infty \ ;$$

$\lim s_k$ neexistuje, říkáme, že řada (1) **diverguje (osciluje)** a nemá součet.

Příklad

Rozhodněte o konvergenci, či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \,.$$

Číselné řady

Příklad
Rozhodněte o konvergenci, či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\ .$$

Příklad
Rozhodněte o konvergenci, či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ .$$

Číselné řady

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \,,$$

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \ ,$$

kde $a_1, \ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**,

Číselné řady

Definice
Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \,,$$
kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Definice

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} ,$$

kde $a_1, q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}\,,$$

kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

Definice

Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \ ,$$
kde $a_1, \ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \left\{ \right.$$

Číselné řady

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \,,$$

kde $a_1,\, q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Číselné řady

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \; ,$$

kde $a_1, \; q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} \quad \Big\{ \\ \\ \end{cases}$$

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \,,$$

kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1,\infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ \end{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Číselné řady

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} ,$$

kde $a_1, q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ & \\ & \end{cases}$$

Definice
Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}\ ,$$
kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & \end{cases}$$

Definice

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \,,$$

kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & s = \frac{a_1}{1-q} \end{cases}$$

Definice
Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \, ,$$

kde $a_1, \, q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.
Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & s = \frac{a_1}{1-q} \\ \text{je divergentní pro } q \in (-\infty, -1] & \end{cases}$$

Definice

Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}\ ,$$
kde $a_1,\ q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1,\infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & s = \frac{a_1}{1-q} \\ \text{je divergentní pro } q \in (-\infty, -1] & \text{(osciluje)} \end{cases}$$

Definice

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \, ,$$

kde a_1, $q \in R$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & s = \frac{a_1}{1-q} \\ \text{je divergentní pro } q \in (-\infty, -1] & \text{(osciluje)} \end{cases}$$

Příklad

Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ je divergentní do $+\infty$.

Číselné řady

Číselné řady

Věta

Číselné řady

Věta
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice

Věta
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice
O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**,

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice

O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.

Číselné řady

Věta
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice
O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.
O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně,

Věta
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice
O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.
O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně, říkáme, že **konvergují neabsolutně**.

Číselné řady

Věta
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice
O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.
O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně, říkáme, že **konvergují neabsolutně**.

Věta

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice

O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.
O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně, říkáme, že **konvergují neabsolutně**.

Věta

Jestliže řada $\sum a_n$ absolutně konverguje,

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice

O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.
O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně, říkáme, že **konvergují neabsolutně**.

Věta

Jestliže řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, potom konverguje.

Číselné řady

Leibnizovo kriterium

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{(tzv. alternující řada)}$$

konvergentní.

Číselné řady

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{(tzv. alternující řada)}$$

konvergentní.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Leibnizovo kriterium
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{(tzv. alternující řada)}$$

konvergentní.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad - \quad \text{konverguje neabsolutně}$$

Číselné řady

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{(tzv. alternující řada)}$$

konvergentní.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad - \quad \text{konverguje neabsolutně}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

Číselné řady

Leibnizovo kriterium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{(tzv. alternující řada)}$$

konvergentní.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad - \quad \text{konverguje neabsolutně}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} \qquad - \quad \text{diverguje (osciluje)}$$

Řady s nezápornými členy

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta

Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta

Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy.

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in N$

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in N$ takové, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$.

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in N$ takové, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$. Potom platí :

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in N$ takové, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$. Potom platí :
a) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta
Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞.

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) **Srovnávací kritérium**
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in N$ takové, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$. Potom platí :
a) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje
b) $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje

Řady s nezápornými členy

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0, 1)$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0$

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \ \ \exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konverguje.

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0$

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \ \ \exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow \ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^* ,$$

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^*\ ,$$

Potom platí
a) $A < 1$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \;\; \Rightarrow \; \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \;\; \Rightarrow \; \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^* \; ,$$

Potom platí
a) $A < 1 \quad \Rightarrow \; \sum a_n$ konverguje.

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^*\ ,$$

Potom platí
a) $A < 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $A > 1$

Řady s nezápornými členy

2) **D'Alembertovo (podílové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

3) **Limitní D'Alembertovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí
a) $A < 1 \quad \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $A > 1 \quad \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0, 1)$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0,1) \ \ \exists n_0 \in N$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \ \ \exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0, 1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \sqrt[n]{a_n} \leq q \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konverguje.

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0,1) \ \exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \Rightarrow \ \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in N$

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0$

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0,1) \ \exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \Rightarrow \ \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1$

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \sqrt[n]{a_n} \leq q\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \sqrt[n]{a_n} \geq 1\ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \sqrt[n]{a_n} \leq q \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \ \ \exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow \ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N \ \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow \ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \ ,$$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí
a) $A < 1$

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí
a) $A < 1 \quad \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1) \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \sqrt[n]{a_n} \leq q \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \;,$$

Potom platí
a) $A < 1 \quad \Rightarrow \;\; \sum a_n$ konverguje.
b) $A > 1$

Řady s nezápornými členy

4) **Cauchyovo (odmocninové) kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:
a) $\exists q \in (0,1)\ \ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $\exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

5) **Limitní Cauchyovo kriterium**
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in R^* \ ,$$

Potom platí
a) $A < 1 \quad \Rightarrow\ \sum a_n$ konverguje.
b) $A > 1 \quad \Rightarrow\ \sum a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá,

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**

Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy,

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$.

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Řady s nezápornými členy

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

6) **Integrální kriterium**
Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.
Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^\infty f(x)\, dx$.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n}$$

Řady s nezápornými členy

Příklad

Pro jaké α konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \; ?$$

Funkční řady, mocninné řady

Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J.

Definice
Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J. Výraz

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots \tag{2}$$

nazýváme **funkční řadou**.

Definice
Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J. Výraz

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots \tag{2}$$

nazýváme **funkční řadou**. Označujeme ji také krátce

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, .$$

Funkční řady, mocninné řady

Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J. Výraz

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots \tag{2}$$

nazýváme **funkční řadou**. Označujeme ji také krátce

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \ .$$

Funkci s_n danou na intervalu J vzorcem

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \ ,$$

Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J. Výraz

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots \tag{2}$$

nazýváme **funkční řadou**. Označujeme ji také krátce

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, .$$

Funkci s_n danou na intervalu J vzorcem

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \, ,$$

nazýváme **n-tým částečným součtem funkční řady (2)**.

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$.

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \quad . \tag{3}$$

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \; . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \dots \ . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) \ .$$

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \ . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0)\ .$$

Potom říkáme, že **funkční řada (2) je v bodě x_0 konvergentní**

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \ . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) \ .$$

Potom říkáme, že **funkční řada (2) je v bodě x_0 konvergentní** a její součet je $s(x_0)$.

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \quad . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) \ .$$

Potom říkáme, že **funkční řada (2) je v bodě x_0 konvergentní** a její součet je $s(x_0)$.
Jestliže je posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) divergentní,

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots \ . \tag{3}$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0)\ .$$

Potom říkáme, že **funkční řada (2) je v bodě x_0 konvergentní** a její součet je $s(x_0)$.
Jestliže je posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) divergentní, říkáme, že **funkční řada (2) v bodě x_0 diverguje**.

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje,

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2),

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci
$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x), \; x \in M,$

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)**

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)** a píšeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ .$$

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)** a píšeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ .$$

Příklad
Najděte obor konvergence a součet funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)** a píšeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ .$$

Příklad

Najděte obor konvergence a součet funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

geometrická řada s kvocientem x

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.
Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),\ x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)** a píšeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \; .$$

Příklad
Najděte obor konvergence a součet funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$$

geometrická řada s kvocientem x

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (-1, 1) \; .$$

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice

Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \qquad (4)$$

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice
Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots,$ jsou reálná čísla.

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice
Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots,$ jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty**

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice

Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots,$ jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice
Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots,$ jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Jestliže speciálně $a = 0$, má mocninná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots \quad , \tag{5}$$

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice
Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots,$ jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Jestliže speciálně $a = 0$, má mocninná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots \quad , \tag{5}$$

a mluvíme o ní jako o mocninné řadě se středem v bodě nula.

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice

Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \ldots$, jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Jestliže speciálně $a = 0$, má mocninná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots \quad , \tag{5}$$

a mluvíme o ní jako o mocninné řadě se středem v bodě nula.

Tvrzení stačí formulovat pro mocninnou řadu se středem 0.

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice
Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad , \tag{4}$$

kde a_i , $i = o, 1, 2, \dots,$ jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Jestliže speciálně $a = 0$, má mocninná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad , \tag{5}$$

a mluvíme o ní jako o mocninné řadě se středem v bodě nula.

Tvrzení stačí formulovat pro mocninnou řadu se středem 0.
Jinak dosaď za x číslo $x - a$.

Věta Abelova

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$,

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$,

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje,

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.
b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.
b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.
c) Existuje takové číslo $\varrho > 0$,

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.
b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.
c) Existuje takové číslo $\varrho > 0$, že řada (5) konverguje pro ta x pro která $|x| < \varrho$,

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.
b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.
c) Existuje takové číslo $\varrho > 0$, že řada (5) konverguje pro ta x pro která $|x| < \varrho$, a v bodech x, pro které $|x| > \varrho$, diverguje.

Věta Abelova
Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek
Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x, pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek
Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů
a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0.
b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.
c) Existuje takové číslo $\varrho > 0$, že řada (5) konverguje pro ta x pro která $|x| < \varrho$, a v bodech x, pro které $|x| > \varrho$, diverguje.

Číslo ϱ nazýváme **poloměrem konvergence řady (5)**.

Funkční řady, mocninné řady

Věta

Funkční řady, mocninné řady

Věta

Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence ϱ.

Věta

Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence ϱ. Nechť pro $x \in (-\varrho, \varrho)$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = s(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = q(x)\ .$$

Věta

Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence ϱ. Nechť pro $x \in (-\varrho, \varrho)$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = s(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = q(x)\ .$$

Potom mají poloměr konvergence ϱ také řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

Věta

Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence ϱ. Nechť pro $x \in (-\varrho, \varrho)$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = s(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = q(x)\ .$$

Potom mají poloměr konvergence ϱ také řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

a pro $x \in (-\varrho, \varrho)$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = s(x) + q(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = s(x) - q(x)\ .$$

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$.

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$. Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$.
Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$. Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Věta (o integrování mocninné řady)

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$.
Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Věta (o integrování mocninné řady)
Nechť je funkce s součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$. Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Věta (o integrování mocninné řady)
Nechť je funkce s součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$.

Věta (o derivování mocninné řady)
Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$. Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\varrho, \varrho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Věta (o integrování mocninné řady)
Nechť je funkce s součtem mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\varrho \neq 0$. Potom platí

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\varrho, \varrho)\,.$$

Taylorova řada

Taylorova řada

Definice

Taylorova řada

Definice

Je-li $m \in N$

Taylorova řada

Definice

Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a,

Taylorova řada

Definice

Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak **Taylorovým polynomem $m-$tého řádu funkce f v bodě a**

Taylorova řada

Definice

Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak **Taylorovým polynomem $m-$tého řádu funkce f v bodě a** se rozumí každý polynom g nejvýše $m-$tého stupně takový, že platí

$$f(a) = g(a),\ f'(a) = g'(a),\ f''(a) = g''(a),\ \dots\ , f^{(m)}(a) = g^{(m)}(a).$$

Taylorova řada

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a,

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak existuje jediný Taylorův polynom g $m-$tého řádu k funkci f v bodě a,

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak existuje jediný Taylorův polynom g $m-$tého řádu k funkci f v bodě a, přitom platí

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^m} = 0 \,.$$

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak existuje jediný Taylorův polynom g $m-$tého řádu k funkci f v bodě a, přitom platí

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^m} = 0\ .$$

Označení

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)
Je-li $m \in N$ a má-li funkce f $m-$tou derivaci v bodě a, pak existuje jediný Taylorův polynom g $m-$tého řádu k funkci f v bodě a, přitom platí

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^m} = 0\,.$$

Označení

$$t_{m,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

Taylorova řada

Taylorova řada

Poznámka

Taylorova řada

Poznámka

Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0

Taylorova řada

Poznámka

Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce f**.

Poznámka

Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce f**.

Příklad

Taylorova řada

Poznámka

Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce f**.

Příklad

Určete Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce e^x.

Taylorova řada

Poznámka
Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce f**.

Příklad
Určete Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce e^x.

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(m)}(x)$$

Taylorova řada

Poznámka

Místo Taylorův polynom $m-$tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce f**.

Příklad

Určete Maclaurinův polynom $m-$tého řádu funkce e^x.

$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(m)}(x)$

$$t_{m,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m \quad .$$

Taylorova řada

Taylorova řada

Věta (Taylorova)

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$,

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$,

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m+1)$-ního řádu,

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m+1)$-ního řádu, pak existuje číslo c ležící mezi a, b

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m+1)$-ního řádu, pak existuje číslo c ležící mezi a, b takové, že platí

$$f(b) = t_{m,a}(b) + r_{m,a}(b)\ ,$$

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m+1)$-ního řádu, pak existuje číslo c ležící mezi a, b takové, že platí

$$f(b) = t_{m,a}(b) + r_{m,a}(b)\ ,$$

kde

$$r_{m,a}(b) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)(b-a)^{m+1}$$

Taylorova řada

Věta (Taylorova)
Je-li $a \neq b$, je-li $n \in N$, má-li funkce f spojitou $m-$tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a, b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m+1)$-ního řádu, pak existuje číslo c ležící mezi a, b takové, že platí

$$f(b) = t_{m,a}(b) + r_{m,a}(b) \ ,$$

kde

$$r_{m,a}(b) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)(b-a)^{m+1}$$

nazýváme **zbytkem příslušného Taylorova polynomu v bodě** b.

Taylorova řada

Příklad

Taylorova řada

Příklad
Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

Taylorova řada

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1,$

Taylorova řada

Příklad
Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} e^c$

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} e^c$

kde $c \in (0, 1)$

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} e^c$

kde $c \in (0, 1)$

$$1 = e^0 < e^c < e^1 < 3$$

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$
$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} e^c$
kde $c \in (0, 1)$

$$1 = e^0 < e^c < e^1 < 3$$

tedy

$$\frac{1}{5040} < \frac{1}{5040} e^c < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680}$$

Taylorova řada

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e.

$b = 1, \quad m = 6$
$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}e^c$
kde $c \in (0, 1)$

$$1 = e^0 < e^c < e^1 < 3$$

tedy

$$\frac{1}{5040} < \frac{1}{5040}e^c < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680}$$

$$2,7182537 < e < 2,7186505$$

Taylorova řada

Taylorova řada

Definice

Taylorova řada

Definice

Nechť funkce f má derivaci všech řádů na intervalu (a, b).

Taylorova řada

Definice

Nechť funkce f má derivaci všech řádů na intervalu (a, b). Potom řadu

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylorova řada

Definice

Nechť funkce f má derivaci všech řádů na intervalu (a, b). Potom řadu

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0**.