

Matematika 1B. ŘADY

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Číselné řady

Definice

Nechť je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \quad (1)$$

nazýváme (nekonečnou) (číselnou) **řadou**, čísla a_1, a_2, a_3, \dots **členy této řady**. Posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$, nazýváme **posloupností částečných součtů** řady (1).

Číselné řady

V případě, že

$\lim s_k = s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) **konverguje** a má součet

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ;$$

$\lim s_k = \infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k ∞)** a má součet

$$s = \infty ;$$

$\lim s_k = -\infty$, říkáme, že řada (1) **diverguje (k $-\infty$)** a má součet

$$s = -\infty ;$$

$\lim s_k$ neexistuje, říkáme, že řada (1) **diverguje (osciluje)** a nemá součet.

Číselné řady

Příklad

Rozhodněte o konvergenci, či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} .$$

Příklad

Rozhodněte o konvergenci, či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} .$$

Číselné řady

Definice

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1},$$

kde $a_1, q \in \mathbb{R}$ se nazývá **geometrická řada**, číslo q **kvocient** této geometrické řady.

Věta 13. 1.

Pro geometrickou řadu platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \begin{cases} \text{je divergentní pro } q \in [1, \infty) \text{ do} & \begin{cases} +\infty \text{ pro } a_1 > 0 \\ -\infty \text{ pro } a_1 < 0 \end{cases} \\ \text{je konvergentní pro } |q| < 1 & s = \frac{a_1}{1-q} \\ \text{je divergentní pro } q \in (-\infty, -1] & \text{(osciluje)} \end{cases}$$

Příklad

Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ je divergentní do $+\infty$.

Číselné řady

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Definice

O řadě $\sum a_n$ říkáme, že **konverguje absolutně**, jestliže konverguje i řada $\sum |a_n|$.

O konvergentních řadách, které nekonvergují absolutně, říkáme, že **konvergují neabsolutně**.

Věta

Jestliže řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, potom konverguje.

Číselné řady

Leibnizovo kritérium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (\text{tzv. alternující řada})$$

konvergentní.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad - \quad \text{konverguje neabsolutně}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} \quad - \quad \text{diverguje (osciluje)}$$

Řady s nezápornými členy

Nyní předpokládáme, že všechny členy řady $\sum a_n$ jsou nezáporné.

Věta

Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k ∞ .

KRITÉRIA KONVERGENCE

1) Srovnávací kritérium

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$. Potom platí :

- a) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje
- b) $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje

Řady s nezápornými členy

2) D'Alembertovo (podílové) kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.

3) Limitní D'Alembertovo kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}^*,$$

Potom platí

a) $A < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

b) $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy

4) Cauchyovo (odmocninové) kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

a) $\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

b) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.

5) Limitní Cauchyovo kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A \in \mathbb{R}^*,$$

Potom platí

a) $A < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

b) $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy

6) Integrální kritérium

Nechť f je funkce spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu $[1, \infty)$.

Potom řada $\sum f(n)$ je konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Příklad

Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n}$$

Řady s nezápornými členy

Příklad

Pro jaké α konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} ?$$

Funkční řady, mocninné řady

Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$, které jsou definované na intervalu J . Výraz

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots \quad (2)$$

nazýváme **funkční řadou**. Označujeme ji také krátce

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n .$$

Funkci s_n danou na intervalu J vzorcem

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) ,$$

nazýváme **n-tým částečným součtem funkční řady (2)**.

Funkční řady, mocninné řady

Zvolme číslo $x_0 \in J$. Utvořme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \dots \quad (3)$$

Nechť posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) je konvergentní a má za limitu číslo $s(x_0)$, tj.

$$s(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) .$$

Potom říkáme, že **funkční řada (2) je v bodě x_0 konvergentní** a její součet je $s(x_0)$.

Jestliže je posloupnost $\{s_n(x_0)\}$ částečných součtů řady (3) divergentní, říkáme, že **funkční řada (2) v bodě x_0 diverguje**.

Funkční řady, mocninné řady

Množinu M všech těch bodů x v nichž řada (2) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** této řady.

Jestliže $M \neq \emptyset$ je obor konvergence funkční řady (2), pak funkci $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, $x \in M$, nazýváme **součtem funkční řady (2)** a píšeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) .$$

Příklad

Najděte obor konvergence a součet funkční řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

geometrická řada s kvocientem x

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) .$$

Funkční řady, mocninné řady

Důležitou skupinu funkčních řad tvoří tzv. mocninné řady.

Definice

Mocninnou řadou se středem v bodě a nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots, \quad (4)$$

kde $a_i, i = 0, 1, 2, \dots$, jsou reálná čísla. Čísla a_i nazýváme **koeficienty** a číslo a **středem mocninné řady (4)**.

Jestliže speciálně $a = 0$, má mocninná řada tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (5)$$

a mluvíme o ní jako o mocninné řadě se středem v bodě nula.

Tvrzení stačí formulovat pro mocninnou řadu se středem 0.

Jinak dosad' za x číslo $x - a$.

Funkční řady, mocninné řady

Věta Abelova

Jestliže řada (5) konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje v každém bodě $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, a to absolutně.

Důsledek

Jestliže v nějakém bodě x_0 řada (5) diverguje, potom diverguje také v každém bodě x , pro který platí $|x| > |x_0|$.

Důsledek

Pro konvergenci mocninné řady (5) nastane jeden z případů

a) Řada (5) konverguje jen v bodě x_0 .

b) Řada (5) konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$.

c) Existuje takové číslo $\rho > 0$, že řada (5) konverguje pro ta x pro která $|x| < \rho$, a v bodech x , pro které $|x| > \rho$, diverguje.

Číslo ρ nazýváme **poloměrem konvergence řady (5)**.

Funkční řady, mocninné řady

Věta

Nechť mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence ρ . Necht' pro $x \in (-\rho, \rho)$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = q(x) .$$

Potom mají poloměr konvergence ρ také řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

a pro $x \in (-\rho, \rho)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = s(x) + q(x) \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = s(x) - q(x) .$$

Funkční řady, mocninné řady

Věta (o derivování mocninné řady)

Nechť funkce s je součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\rho \neq 0$.
Potom funkce s je diferencovatelná na intervalu $(-\rho, \rho)$ a platí

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pro } x \in (-\rho, \rho).$$

Věta (o integrování mocninné řady)

Nechť je funkce s součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $\rho \neq 0$.
Potom platí

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pro } x \in (-\rho, \rho).$$

Taylorova řada

Definice

Je-li $m \in \mathbb{N}$ a má-li funkce f m -tou derivaci v bodě a , pak **Taylorovým polynomem m -tého řádu funkce f v bodě a** se rozumí každý polynom g nejvýše m -tého stupně takový, že platí

$$f(a) = g(a), f'(a) = g'(a), f''(a) = g''(a), \dots, f^{(m)}(a) = g^{(m)}(a).$$

Taylorova řada

Věta (o existenci a jednoznačnosti Taylorova polynomu)

Je-li $m \in \mathbb{N}$ a má-li funkce f m -tou derivaci v bodě a , pak existuje jediný Taylorův polynom g m -tého řádu k funkci f v bodě a , přitom platí

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^m} = 0.$$

Označení

$$t_{m,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

Taylorova řada

Poznámka

Místo Taylorův polynom m –tého řádu v bodě 0 říkáme také **Maclaurinův polynom m –tého řádu funkce f** .

Příklad

Určete Maclaurinův polynom m –tého řádu funkce e^x .

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(m)}(x)$$

$$t_{m,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{m!}x^m .$$

Taylorova řada

Věta (Taylorova)

Je-li $a \neq b$, je-li $n \in \mathbb{N}$, má-li funkce f spojitou m -tou derivaci na uzavřeném intervalu s krajními body a , b a má-li na odpovídajícím otevřeném intervalu derivaci $(m + 1)$ -ního řádu, pak existuje číslo c ležící mezi a , b takové, že platí

$$f(b) = t_{m,a}(b) + r_{m,a}(b) ,$$

kde

$$r_{m,a}(b) = \frac{1}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(c)(b - a)^{m+1}$$

nazýváme **zbytkem příslušného Taylorova polynomu v bodě b** .

Taylorova řada

Příklad

Pomocí Maclaurinova vzorce šestého řádu pro přirozenou exponenciální funkci vypočítejte číslo e .

$$b = 1, \quad m = 6$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} e^c$$

kde $c \in (0, 1)$

$$1 = e^0 < e^c < e^1 < 3$$

tedy

$$\frac{1}{5040} < \frac{1}{5040} e^c < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680}$$

$$2,7182537 < e < 2,7186505$$

Taylorova řada

Definice

Nechť funkce f má derivaci všech řádů na intervalu (a, b) . Potom řadu

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0** .