Příklady k zápočtu z Matematiky 1B KS (1. část)

Najděte a načrtněte definiční obor funkce.

1. $f(x,y) = \frac{1}{25-x^2-y^2}$
2. $f(x,y) = \sqrt{3x} - \frac{2}{\sqrt{y}}$
3. $f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{xy}}$
4. $f(x,y) = \frac{\pi}{6} y^2 \sqrt{x^2-y^2}$

Najděte řezy grafu funkce f rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami $x = 0,\ y = 0$.

5. $f(x,y) = x^2 - y^2$
6. $f(x,y) = xy^2$

Najděte vrstevnice na grafu funkce f.

7. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
8. $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$
9. $f(x,y) = xy$

Utvořte složenou funkci $h(g_1, g_2)$, je-li:

10. $g_1(x,y) = x + 2y, \quad g_2(x,y) = x^y, \quad h(x,y) = x + y$
11. $g_1(x,y) = 3xy, \quad g_2(x,y) = x^2 - y^2, \quad h(x,y) = \sin x + \sqrt{y}$
12. $g_1(x,y) = x - y, \quad g_2(x,y) = x + y, \quad h(x,y) = \sqrt{xy}$

Určete parciální derivace funkce f v bodě A podle všech jejích proměnných:

13. $f(x,y) = \frac{\pi}{3} x^2 y \ , \qquad A = [4,6] \ .$
14. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ , \qquad A = [1,1] \ .$
15. $f(x,y) = e^x \sin y \ , \qquad A = [1,2] \ .$
16. $f(x,y) = \mathrm{arctg} \frac{x}{y} \ , \qquad A = [0,1] \ .$
17. $f(x,y,z,u) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) \ , \qquad A = [3,2,1,0] \ .$

Určete parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných:

18. $f(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{x^4}$

19. Jaký úhel svírá tečna průsečnice plochy $z = \sqrt{x^2+y^2+1}$ s rovinou $y = 1$ v bodě $T = [1, 1, \sqrt{3}]$ s kladnou poloosou x?

Určete diferenciál funkce f v bodě A.

20. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2, \qquad A = [1,2]$

Určete tečnou rovinu grafu funkce f v bodě T:

21. $f(x,y) = 2x^2 + y^2, \quad T = [1,1,3]$

22. $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x, \quad T = [1,0,2]$

23. $f(x,y) = xy, \quad T = [1,2,2]$

Určete $f'(a)$, $f''(a)$ pro funkci f určenou implicitně funkcí g a bodem $B = [a,b]$:

24. $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3, \quad B = [0,1].$

25. $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3, \quad B = [1,1].$

26. $g(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y, \quad B = [2,0].$

27. $g(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 16, \quad B = [4,0].$

Najděte lokální extrémy funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B:

28. $g(x,y) = x^4 + y^3 + 2x^2y + 2, \quad B = [1,-1].$

29. $g(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1, \quad B = [-1,0].$

Najděte tečnu a normálu v bodě B ke grafu funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B:

30. $g(x,y) = xy + \mathrm{ln} y - 1, \quad B = [1,1].$

31. $g(x,y) = x^5 + y^5 - 2xy, \quad B = [1,1].$

Najděte tečnou rovinu grafu funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B:

32. $g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 6, \quad B = [1,2,-3].$

33. $g(x,y,z) = z - y - \mathrm{ln}\frac{x}{z}, \quad B = [1,1,1].$

Najděte body, v nichž má lokální extrémy funkce:

34. $f(x,y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2.$

35. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2.$

36. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y.$

37. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z.$

38. $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1.$

39. $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 14x + 14y + 4z + 17.$

Najděte body, v nichž má funkce f vázané extrémy, příp. vázané lokální extrémy s podmínkou $g(X) = 0$:

40. $f(x,y) = xy - x + y - 1, \quad g(x,y) = x + y - 1.$

41. $f(x,y) = x + y, \quad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1.$

Najděte body, v nichž má funkce f globální extrémy:

42. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D(f)$ je trojúhelník zadaný nerovnostmi $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 3 - x.$

43. $f(x,y) = xy^2(4 - x - y), \quad D(f)$ je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 6.$