Matematika 2.
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
Elementární metody řešení ODR prvního řádu

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Separovatelné ODR.

Separovatelné ODR.

Diferenciální rovnici

Separovatelné ODR.

Diferenciální rovnici

$$y' = f(x).g(y) \;, \tag{1}$$

kde f a g jsou funkce jedné proměnné, nazýváme **separovatelnou ODR**.

Separovatelné ODR.

Řešení

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

$$\downarrow$$

$$G(y) = F(x) + C$$

(implicitně definované řešení $y = y(x)$)

Separovatelné ODR.

Řešení
1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

$$\downarrow$$

$$G(y) = F(x) + C$$

(implicitně definované řešení $y = y(x)$)
3) Je-li to možné, přejdeme k explicitnímu vyjádření

$$y = H(x) \, .$$

Separovatelné ODR.

Příklad

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

Separovatelné ODR.

Příklad

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

Příklad

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)} \qquad y(2) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) , \tag{2}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \,, \qquad (2)$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \,, \tag{2}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Příklad

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \; , \tag{2}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Příklad
Řešte diferenciální rovnici

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \; .$$

Lineární ODR 1. řádu.

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$,

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**. Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany),

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\ , \tag{3}$$

kde $p,\ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).
(Termín „homogenní“ zde má zcela jiný význam než v bodě b))

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{3}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).
(Termín „homogenní" zde má zcela jiný význam než v bodě b))
Diferenciální rovnici (6) je přiřazena homogenní lineární ODR

$$y' + p(x)y = 0 \ . \tag{4}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ ,\ \ x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6)

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Řešení y_p hledáme ve tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx} \ , \ \ x \in (a,b) \ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p = k(x).e^{-\int p(x)\,dx} \ , \qquad (5)$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p = k(x).e^{-\int p(x)\,dx}\ , \tag{5}$$

kde k je nějaká neznámá funkce.

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx} \ ,$$

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a,b). \tag{6}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a,b). \tag{6}$$

Dosazením (9) do (8) dostaneme partikulární řešení.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a,b). \tag{6}$$

Dosazením (9) do (8) dostaneme partikulární řešení.
3) Sestavíme obecné řešení

$$y_o = y_h + y_p\ .$$

Příklad:
Řešte diferenciální rovnici

$$y' - \frac{y}{2(x+1)} = e^x \sqrt{x+1}\,.$$

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0\ .$$

Věta 2.

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \, .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b),

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b), \ y_0 \in R$.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b), \ y_0 \in R$.

Příklad.

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{7}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0\ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b),\ y_0 \in R$.

Příklad.

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' - \frac{y}{2(x+1)} = e^x\sqrt{x+1} \qquad y(0) = 0.$$