Matematika 2.
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
Homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b),

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$,

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí**

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \qquad (1)$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany),

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \qquad (1)$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice**

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \qquad (1)$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice** (rovnice s pravou stranou).

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{1}$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice** (rovnice s pravou stranou). Diferenciální rovnici (11) je přiřazena homogenní lineární ODR n-tého řádu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = 0. \tag{2}$$

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu (a, b),

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b),

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots ,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

(Hledání takového řešení říkáme opět řešení Cauchyovy úlohy,

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

(Hledání takového řešení říkáme opět řešení Cauchyovy úlohy, příslušným podmínkám opět říkáme počáteční podmínky.)

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3}$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ nazýváme **homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ nazýváme **homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Rovnici (13) přiřadíme algebraickou rovnici

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\ . \tag{4}$$

Této rovnici říkáme **charakteristická rovnice ODR (13)**.
Víme, že rovnice (14) má n komplexních kořenů (ty nemusí být navzájem různé, některé kořeny mohou být několikanásobné).

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14),

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a+ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a-ib$.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a - ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a+ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a-ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ x^2e^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a - ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ x^2e^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ x^2e^{ax}\sin bx,\ \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx.$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému,

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li $y_1, y_2, \dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\ldots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\ldots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + y = 0$$