

Matematika 2.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \quad (1)$$

kde p_1, p_2, \dots, p_n, q jsou funkce spojité v intervalu (a, b) , nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.

Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (1) **homogenní rovnici** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (1) je **nehomogenní rovnice** (rovnice s pravou stranou). Diferenciální rovnici (1) je přiřazena homogenní lineární ODR n-tého řádu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Nechť funkce p_1, p_2, \dots, p_n, q jsou spojité v intervalu (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ a necht' $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.

Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b) , které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, y''(x_0) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

(Hledání takového řešení říkáme opět řešení Cauchyovy úlohy, příslušným podmínkám opět říkáme počáteční podmínky.)

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (3)$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ nazýváme **homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Rovnici (13) přiřadíme algebraickou rovnici

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4)$$

Této rovnici říkáme **charakteristická rovnice ODR (13)**.

Víme, že rovnice (14) má n komplexních kořenů (ty nemusí být navzájem různé, některé kořeny mohou být několikanásobné).

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K -násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib$, ($b \neq 0$) je m -násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m -násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a - ib$.

Těmto $2m$ kořenům přiřadíme následujících $2m$ funkcí:

$$e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, x^2 e^{ax} \cos bx, \dots, x^{m-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, x^2 e^{ax} \sin bx, \dots, x^{m-1} e^{ax} \sin bx.$$

Homogenní lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, \dots, y_n funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i ,$$

kde C_1, C_2, \dots, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + y = 0$$