Matematika 2.
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule,

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (1)$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (1)$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15)

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15) a y_h je řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15).

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{1}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15) a y_h je řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15).

Partikulární řešení nalezneme tzv. variací konstant.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.

Jestliže funkce $y_1, y_2, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15),

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce $y_1, y_2, \dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{2}$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \; , \tag{2}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{2}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.

Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{2}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.

Jestliže funkce $y_1,\ y_2,\ \dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n\ , \tag{2}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

Variace konstant.

Jestliže funkce y_1, y_2, $\ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{2}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \qquad (2)$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = q(x)$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\dots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^x,$$

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^x,$$

$$y'' + y = e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2\,.$$

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Uvažujme nehomogenní LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty, kde funkce na pravé straně je speciálního typu

$$q(x) = e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou dané polynomy.

V tomto případě můžeme použít při hledání partikulárního řešení $y_p(x)$ metodu odhadu pro speciální pravou stranu, kdy pokládáme

$$y_p(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0$$

kde $R(x), S(x)$ jsou polynomy s dosud neurčenými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů $P(x), Q(x)$.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Hledané partikulárního řešení $y_p(x)$ má formálně stejný tvar jako pravá strana $b(x)$ až na činitel x^k. Čísla $a, b \in \mathbb{R}$ jsou dána pravou stranou, polynomy $R(x), S(x)$ učíme metodou neučitých koefcientů (dosadíme-li je do dané LDR) a číslo $k \in \mathbb{N}_0$ určíme podle násobnosti kořene $\alpha = a \pm ib$ v charakteristické rovnici $\chi_n(\lambda) = 0$ příslušné k přiřazené homogenní LDR. Tedy:

- $k = 0$, není-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$,
- $k =$ násobnost kořene α, je-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$.

Příklad: Určete obecná řešení pro následující nehomogenní LDR

$$a)\ y'' - 2y' - 3y = -3x + 1 \qquad b)\ y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$$
$$c)\ y'' + y = 5e^x \sin x \qquad d)\ y'' + y = 2\cos x$$