

Matematika 2.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \quad (1)$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15) a y_h je řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15).

Partikulární řešení nalezneme tzv. variací konstant.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.

Jestliže funkce y_1, y_2, \dots, y_n tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n, \quad (2)$$

kde $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Neznámé funkce $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + \dots + C'_n(x)y_n = 0$$

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \dots + C'_n(x)y'_n = 0$$

.....

$$C'_1(x)y_1^{(n-2)} + C'_2(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = q(x)$$

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p .

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^x,$$

$$y'' + y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Nehomogenní lineární ODR n -tého řádu.

Uvažujme nehomogenní LDR n -tého řádu s **konstantními koeficienty**, kde funkce na pravé straně je speciálního typu

$$q(x) = e^{ax} (P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou dané polynomy.

V tomto případě můžeme použít při hledání partikulárního řešení $y_p(x)$ **metodu odhadu** pro speciální pravou stranu, kdy pokládáme

$$y_p(x) = x^k e^{ax} (R(x) \cos(bx) + S(x) \sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$$

kde $R(x), S(x)$ jsou polynomy s dosud neurčenými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů $P(x), Q(x)$.

Nehomogenní lineární ODR n-tého řádu.

Hledané partikulárního řešení $y_p(x)$ má formálně stejný tvar jako pravá strana $b(x)$ až na činitel x^k . Čísla $a, b \in \mathbb{R}$ jsou dána pravou stranou, polynomy $R(x), S(x)$ učíme **metodou neúčitých koeficientů** (dosadíme-li je do dané LDR) a číslo $k \in \mathbb{N}_0$ určíme podle **násobnosti** kořene $\alpha = a \pm ib$ v charakteristické rovnici $\chi_n(\lambda) = 0$ příslušné k přiřazené homogenní LDR. Tedy:

- $k = 0$, není-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$,
- $k =$ násobnost kořene α , je-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$.

Příklad: Určete obecná řešení pro následující nehomogenní LDR

$$a) y'' - 2y' - 3y = -3x + 1$$

$$b) y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$$

$$c) y'' + y = 5e^x \sin x$$

$$d) y'' + y = 2 \cos x$$