

Matematika 2.

Petr Salač

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Technická univerzita v Liberci

petr.salac@tul.cz

2020

Soustavy lineárních rovnic

Řešení soustavy lineárních rovnic je numerická úloha využívající poznatků z teorie matic.

Definice.

Soustavu m lineárních rovnic s n neznámými x_1, x_2, \dots, x_n zapisujeme obecně ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

První index i koeficientu a_{ij} je pořadové číslo rovnice, druhý index j značí, že a_{ij} je koeficientem u neznámé x_j .

a_{ij} nazveme **koeficienty** soustavy ,

b_i nazveme **pravé strany** soustavy .

Soustavy lineárních rovnic

Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

jejíž prvky tvoří koeficienty u neznámých nazveme **matice soustavy (1)**.

Matici

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

nazveme **sloupec pravých stran**.

Matici

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

která vznikne z matice A přidáním sloupce pravých stran, nazveme **rozšířená matice soustavy (1)**.

Soustavy lineárních rovnic

Jsou-li pravé strany všech rovnic rovny nule, tj. $b = 0$, nazývá se taková soustava **homogenní**.

Je-li alespoň jedno z čísel b_1, b_2, \dots, b_m různé od nuly, mluvíme o **nehomogenní soustavě rovnic**.

Řešením soustavy lineárních rovnic (1) se rozumí n -tice čísel (v_1, v_2, \dots, v_n) , která je řešením každé rovnice, tj. platí

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= b_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n &= b_m \end{aligned}$$

Má-li soustava řešení (jedno nebo nekonečně mnoho), řekneme, že je **řešitelná**.

Má-li jediné řešení, řekneme, že je **jednoznačně řešitelná**.

Jestliže soustava nemá řešení, řekneme, že je **neřešitelná**.

Soustavy lineárních rovnic

Věta. (Frobeniova věta o řešitelnosti)

Pro soustavu $Ax = b$ s n neznámými platí:

- 1) Je-li $h(A) = h(A|b) = n$, soustava má jediné řešení.
- 2) Je-li $h(A) = h(A|b) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení. (obecné řešení závisí na $n - h(A)$ parametrech)
- 3) Je-li $h(A) < h(A|b)$, soustava je neřešitelná.

Příklad.

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\5x_1 - 7x_2 - x_3 - 16x_4 &= 10 \\3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 9\end{aligned} \quad \cdot$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení

$$x_1 = \frac{155}{48} - \frac{9}{4}t, \quad x_2 = \frac{11}{16} - \frac{7}{4}t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = \frac{1}{12}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$