Matematika 2.

Petr Salač
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

2020

Determinant

Definice. (Determinant matice)
Uvažujme čtvercovou číselnou matici n-tého řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme číslo určené takto:
1. Pro $n = 1$ je $\det \boldsymbol{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je $\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je
$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \det \boldsymbol{A}_{11} - a_{12} \det \boldsymbol{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \boldsymbol{A}_{1n}$,
kde $\boldsymbol{A}_{1k}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí matici $(n-1)$-ho řádu, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ (n-tého řádu) vynecháním prvního řádku a k-tého sloupce.

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice n-tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.
Označíme-li j-tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det\boldsymbol{A} = (-1)^{j+1}a_{j1}\det\boldsymbol{A}_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{j+n}a_{jn}\det\boldsymbol{A}_{jn} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obdobně, pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\det\boldsymbol{A} = (-1)^{k+1}a_{1k}\det\boldsymbol{A}_{1k} + (-1)^{k+2}a_{2k}\det\boldsymbol{A}_{2k} + \cdots +$$

$$+(-1)^{k+n}a_{nk}\det\boldsymbol{A}_{nk} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Přitom matice $\boldsymbol{A}_{jk}$ tvoříme obdobným způsobem jako v definici.

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Věta.
Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.
Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Poznámka.
Sarrusovo pravidlo platí pouze pro determinanty 3-tího stupně. Determinanty vyšších stupňů se počítají jinak.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice.
Komplexní číslo λ se nazývá vlastní číslo čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$, existuje-li nenulový vektor $\boldsymbol{v}$ takový, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\,.$$

Takový vektor $\boldsymbol{v}$ se nazývá vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající vlastnímu číslu λ.

Rovnici

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

lze psát ve tvaru

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

To je soustava homogenních lineárních algebraických rovnic, která má nenulové řešení právě když je hodnost matice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})$ menší než n, tedy matice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})$ je singulární. To je ekvivalentní s podmínkou

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0\,. \tag{1}$$

Rovnici (1) (pro neznámou λ) nazýváme charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{A}$. Jejím řešením získáme vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad.
Nalezněte vlastní čísla matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Charakteristická rovnice

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda) + 3\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) - \\ &\quad -[(2-\lambda)\cdot 2\cdot 4 + (1-\lambda)\cdot(-1)\cdot 1 + (-1-\lambda)\cdot(-1)\cdot 3] = \\ &= \cdots = (1-\lambda)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda+2) \end{aligned}$$

Řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Výpočet vlastních vektorů.
Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu λ, můžeme najít řešením homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

(pro neznámé v_1, v_2, $\ldots$, v_n, které jsou složkami vektoru $\boldsymbol{v}$).

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad.
Nalezněte vlastní vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

které odpovídají vlastním číslům $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

Řešení:
Dosadíme vlastní číslo $\lambda_1 = 1$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Dosadíme vlastní číslo $\lambda_1 = 1$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} v_1 \qquad + \ v_3 &= 0 \\ v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 4$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = -1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je tedy

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Řešení:
Analogicky dosadíme vlastní číslo $\lambda_2 = 3$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} v_1 - 2v_2 + 3v_3 &= 0 \\ v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 2$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = 1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ je tedy

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Analogicky dosadíme vlastní číslo $\lambda_3 = -2$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} v_1 - 2v_2 + 3v_3 &= 0 \\ v_2 - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 1$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = -1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ je tedy

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$