Matematika 2.
Limita, spojitost, derivace a diferenciál funkce n proměnných

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice. (Limita funkce)
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě $A \in \boldsymbol{E}_n$ limitu b, jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu A tak, že pro všechny body $X \in U,\ X \neq A$, je $f(X) \in V$.
Píšeme pak

$$\lim_{X \to A} f(X) = b \ .$$

Příklad. (funkce, která nemá limitu v počátku)
Funkce

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definovaná v $\boldsymbol{E}_2 \setminus \{\boldsymbol{O}\}$ nemá v počátku $\boldsymbol{O}$ limitu.

Věta 2.1.
Funkce n proměnných má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Konstantní funkcí n proměnných rozumíme funkci f definovanou na E_n předpisem

$$f(X) = a \ ,$$

kde $a \in R$.

Je-li $a = 0$, pak konstantní funkcí n proměnných nazveme nulovou funkcí n proměnných.

Věta 2.2.
Je-li

$$\lim_{X\to A} f(X) = b,\ \lim_{X\to A} g(X) = c\ ,$$

pak

$$\lim_{X\to A} [f(X) + g(X)] = b + c\ , \tag{1}$$

$$\lim_{X\to A} [f(X) - g(X)] = b - c\ , \tag{2}$$

$$\lim_{X\to A} [f(X).g(X)] = b.c\ , \tag{3}$$

je-li navíc $c \neq 0$, pak také

$$\lim_{X\to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{b}{c}\ . \tag{4}$$

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Polynomem n proměnných se rozumí funkce, která libovolnému bodu z $\boldsymbol{E}_n$ přiřazuje součet součinů nějakých čísel a celých nezáporných mocnin jeho souřadnic, tj. součet výrazů tvaru

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

zvaných členy polynomu,
přitom $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla a číslo a se nazývá koeficient příslušného členu.

Příklad.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \dots + n x_n^n$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} + 2x_1 x_2^2 x_3 \dots x_n^n$$

definované na $\boldsymbol{E}_n$ jsou polynomy n proměnných.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Racionální funkcí n proměnných je funkce, která vzniká dělením dvou polynomů, přičemž dělitel není nulová funkce. Jejím definičním oborem je $\boldsymbol{E}_n$ s výjimkou kořenů dělitele.

Příklad.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ .$$

Příklad.

Je-li f polynom n proměnných, pak

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$$

pro každý bod $A \in \boldsymbol{E}_n$.

Je-li f racionální funkce n proměnných definovaná v bodě A, pak

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) \ .$$

Limita a spojitost funkce n proměnných

V definici limity místo $b \in \boldsymbol{R}$ užijeme nevlastní bod ∞ nebo $-\infty$.

Definice. (Nevlastní limita funkce)
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě $A \in \boldsymbol{E}_n$ nevlastní limitu ∞, resp. $-\infty$, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu ∞, resp. $-\infty$, existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U,\ X \neq A$, je $f(X) \in V$.
Píšeme pak

$$\lim_{X \to A} f(X) = \infty \qquad \text{resp.} \lim_{X \to A} f(X) = -\infty \ .$$

Nevlastní limity mají analogické vlastnosti jako limity.

Příklad.

$$\lim_{[x,y] \to [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty \ .$$

s-okolí ∞, tj. $V = (s, \infty)$ $\quad s > 0 \quad U_{\frac{1}{\sqrt{s}}}(0)$.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice
Nechť $A \in D_f$, pak řekneme, že funkce f n proměnných je spojitá v bodě A, jestliže

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) \; .$$

Příklad.
Polynom n proměnných je spojitý v každém bodě $A \in \boldsymbol{E}_n$.
Racionální funkce n proměnných je spojitá v každém bodě $A \in \boldsymbol{E}_n$, v němž je definována.

Věta 2.4. (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)
Jsou-li funkce f a g n proměnných spojité v bodě A, pak jsou v bodě A spojité i funkce $f+g$, $f-g$ a $f.g$, je-li navíc $g(A) \neq 0$ je v bodě A spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 2.5. (o spojitosti složené funkce)
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných spojité v bodě A a je-li funkce h p proměnných spojitá v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ je spojitá v bodě A.

Příklad.
Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ v bodě $[0,0]$.

$g(X) = x^2 + y^2 + 1$ spojitá v bodě $[0,0]$
$h(x) = \sqrt{x}$ spojitá v bodě 1
tedy dle věty $f = h(g)$ je spojitá v bodě $[0,0]$.

Derivace a diferenciály funkce n proměnných

Definice. (Parciální derivace)
f je funkce n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A = [a_1, \ldots, a_n] \in D(f)$, j je některé z čísel $1, 2, \ldots, n$.
Definujeme funkci jedné proměnné g_j s definičním oborem

$$D(g_j) = \{x \in \boldsymbol{R};\ [a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n] \in D(f)\}$$

a s funkčním předpisem

$$g_j(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)\ .$$

Má-li funkce g_j derivaci v bodě a_j, nazýváme ji parciální derivací funkce f podle proměnné x_j v bodě A a označíme $\frac{\partial f}{\partial x_j}(A)$.
Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = g_j'(a_j)\ .$$

Parciální derivací funkce f podle proměnné x_j rozumíme funkci n proměnných označenou $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, která každému bodu $A \in D(f)$, v němž existuje parciální derivace podle proměnné x_j, přiřazuje její hodnotu.

Poznámka.
Parciální derivací podle proměnné x_j vypočítáme tak, že všechny proměnné až na j-tou „považujeme“ za konstanty a stanovíme derivaci takto vzniklé funkce jedné proměnné.

Příklad.
Určete obě parciální derivace funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

definované v $\boldsymbol{E}_2$.

Derivace a diferenciály funkce n proměnných

Věta 3.1.
Má-li funkce f n proměnných v nějakém okolí bodu A omezené parciální derivace podle všech proměnných, pak je v bodě A spojitá.

Poznámka.
Samotná existence parciálních derivací podle všech proměnných v bodě A nezaručuje spojitost funkce v bodě A.

Příklad.
Uvažujme funkci dvou proměnných

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \neq 0 \text{ a současně } y \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0 \text{ nebo } y = 0, \end{cases}$$

definovanou na $\boldsymbol{E}_2$.

není spojitá v počátku, ale $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je diferencovatelná v bodě A, jestliže existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ taková, že

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - f(A) - c_1(x_1 - a_1) - c_2(x_2 - a_2) - \dots - c_n(x_n - a_n)}{d(X, A)} = 0 \ ,$$

přičemž $d(X, A)$ je vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Věta 3.2.
Je-li funkce f n proměnných diferencovatelná v bodě A, pak je v bodě A spojitá, má v něm parciální derivace podle všech svých proměnných a platí

$$c_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \ .$$

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Definice.
Je-li funkce f n proměnných diferencovatelná v bodě A, definujeme diferenciál funkce f v bodě A jako funkci

$$d_{f_A}(X) = c_1(x_1 - a_1) + c_2(x_2 - a_2) + \cdots + c_n(x_n - a_n)$$

definovanou na $\boldsymbol{E}_n$.

Věta 3.3.
Má-li funkce f v bodě A spojité parciální derivace podle všech proměnných, pak je funkce f diferencovatelná v bodě A.

Příklad.
Zjistěte, zda je funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

diferencovatelná v bodě $A = [1, 2]$, a v kladném případě určete d_{f_A}.

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Nyní $n = 2$, f funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2]$, pak její diferenciál v tomto bodě je tvaru

$$d_{f_A}(X) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$$

grafem je rovina

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)\ .$$

rovina $y = a_2$ v ni přímka $z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1)$ rovnoběžná s tečnou
rovina $x = a_1$ v ni přímka $z = \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$ rovnoběžná s tečnou

Rovina procházející oběma tečnami průsečnic grafu funkce f s rovinami $x = a_1$ a $y = a_2$ je tedy rovnoběžná s grafem diferenciálu funkce f v bodě A, má rovnici

$$z = f(A) + d_{f_A}(X) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$$

a nazýváme ji tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $T = [a_1, a_2, f(A)]$.

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Příklad.
Určete tečnou rovinu plochy

$$z = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $T = [1, 2, 11]$.