Matematika 2.
Parciální derivace vyšších řádů, Směrová derivace a gradient, Funkce zadané implicitně

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Parciální derivace složené funkce

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$,

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad.
Určete $\frac{\partial f}{\partial x}$ složené funkce $f = h(g_1, g_2, g_3)$, kde h je funkce proměnných u, v, w diferencovatelná na $\boldsymbol{E}_3$,
$g_1(x, y, z) = x \cos y \sin z$,
$g_2(x, y, z) = x \sin y \sin z$,
$g_3(x, y, z) = x \cos z$.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \,.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \, .$$

Příklad.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \; .$$

Příklad.
Určete všechny druhé parciální derivace funkce

$$f(x,y) = x^2 y + x^4 y^3 \quad \text{definované v } \boldsymbol{E}_2 \; .$$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A,

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A, pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(A) \, .$$

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.
Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.
Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A, pak

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \ .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\; A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) \ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ a značíme ji

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) \quad (= g_s'(0)\,)\ .$$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A)$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t}$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$.

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0)$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} =$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u \to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,u,\ldots,a_n)-f(A)}{u-a_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\dots,u,\dots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\dots,u,\dots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\dots,u,\dots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$

tedy parciální derivace jsou zvláštním případem směrových derivací.

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$$

a označíme jej $\mathrm{grad} f(A)$.

Poznámka

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A)$

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha$

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší,

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha$,

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší,

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha$,

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$,

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$.
(tj. $\boldsymbol{s}$ je násobkem gradientu).

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete jednotkový vektor $\boldsymbol{s}$, v jehož směru je směrová derivace

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ největší a zjistěte ji.

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x) \ .$$

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$

$f(x) = x^3 + 2x - 11$

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$

$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$

$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)\ ,$$

kde t je reálný parametr.

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x) \ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t), \ \ y = f_2(t) \ ,$$

kde t je reálný parametr.

Příklad 2.

$x = 2 + 3t, \ \ y = 1 - t \ \ , \ \ t \in R \ ,$ přímka

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)\ ,$$

kde t je reálný parametr.

Příklad 2.

$x = 2 + 3t,\ \ y = 1 - t\ \ ,\ \ t \in R\ ,$ přímka
$x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ ,\ \ t \in [0, 2\pi]\ ,$ kružnice

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)\ ,$$

kde t je reálný parametr.

Příklad 2.

$x = 2 + 3t,\ \ y = 1 - t\ \ ,\ \ t \in R\ ,$ přímka
$x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ ,\ \ t \in [0, 2\pi]\ ,$ kružnice
$x = 2\cos t,\ \ y = 5\sin t\ \ ,\ \ t[0, 2\pi]\ ,$ elipsa

Funkce zadané implicitně

3) Funkce zadaná v implicitním tvaru (implicitní funkce) je zadána pomocí funkce dvou reálných proměnných. Ptáme se, kdy rovnice

Funkce zadané implicitně

3) Funkce zadaná v implicitním tvaru (implicitní funkce) je zadána pomocí funkce dvou reálných proměnných. Ptáme se, kdy rovnice

$$g(x, y) = 0$$

určuje y jako funkci proměnné x.

Funkce zadané implicitně

3) Funkce zadaná v implicitním tvaru (implicitní funkce) je zadána pomocí funkce dvou reálných proměnných. Ptáme se, kdy rovnice

$$g(x, y) = 0$$

určuje y jako funkci proměnné x.

Příklad 3.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0 \ .$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x,y] \in D(g);\ g(x,y) = 0\}\ .$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Příklad 4.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\} .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Příklad 4.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

Příklad 5.

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Příklad 4.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

Příklad 5.

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Příklad 6.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x, y) = xy - |xy|$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x,y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x,y) = xy - |xy|$$

Příklad 9.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0\ .$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x, y) = xy - |xy|$$

Příklad 9.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0 \; .$$

Příklad 10.

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0 \; .$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x, y) = xy - |xy|$$

Příklad 9.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0\ .$$

Příklad 10.

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0\ .$$

Příklad 11.

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0\ .$$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$,

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$,

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \qquad (1)$$

a

$$f(a) = b\,. \qquad (2)$$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

a

$$f(a) = b\,. \tag{2}$$

Definice

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

a

$$f(a) = b\,. \tag{2}$$

Definice
Funkci f (z Věty 4.1.) nazýváme funkcí zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$ a bodem B.

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

pokud

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

pokud

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena" funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

pokud

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))}$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

Funkce zadané implicitně

další derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x)+$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x)+$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x) +$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x)+$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x)+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

odtud vypočítáme

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x) +$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

odtud vypočítáme

$$f''(x) = \ldots$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x) +$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

odtud vypočítáme

$$f''(x) = \dots$$

podobně postupujeme dále ...

Funkce zadané implicitně

Příklad.
Určete tečnu grafu funkce f zadané implicitně rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0$$

a bodem $B = [1, 2]$ v bodě B.

Funkce zadané implicitně

Příklad.
Určete tečnu grafu funkce f zadané implicitně rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0$$

a bodem $B = [1, 2]$ v bodě B.

Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných.

Funkce zadané implicitně

Příklad.
Určete tečnu grafu funkce f zadané implicitně rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0$$

a bodem $B = [1, 2]$ v bodě B.

Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných.

Příklad.
Určete tečnou rovinu grafu funkce $f(x, y)$ dvou proměnných zadané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0$$

a bodem $B = [1, 2, 3]$ v bodě B.