Matematika 2.
Lokální a vázané extrémy

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**,

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**,

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)
Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)
Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém a má-li v bodě A parciální derivaci podle proměnné x_j, pak

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)
Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém a má-li v bodě A parciální derivaci podle proměnné x_j, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \, .$$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)
Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém a má-li v bodě A parciální derivaci podle proměnné x_j, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \, .$$

Definice

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém a má-li v bodě A parciální derivaci podle proměnné x_j, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \, .$$

Definice

Body, v nichž všechny první parciální derivace existují a jsou rovny nule,

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální maximum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \leq f(A)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **lokální minimum**, jestliže existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$ je $f(X) \geq f(A)$.
Má-li funkce f v bodě A lokální maximum nebo lokální minimum, řekneme, že má v A **lokální extrém**.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Má-li funkce f n proměnných v bodě A lokální extrém a má-li v bodě A parciální derivaci podle proměnné x_j, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \, .$$

Definice

Body, v nichž všechny první parciální derivace existují a jsou rovny nule, nazveme **stacionárními body funkce f**.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Označení:

Označení:
Nechť f je funkce n proměnných, $A \in R^n$.

Označení:

Nechť f je funkce n proměnných, $A \in R^n$.

$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A)$,

Označení:

Nechť f je funkce n proměnných, $A \in R^n$.

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) \ ,$$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix} \ ,$$

$\ldots$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Označení:

Nechť f je funkce n proměnných, $A \in R^n$.

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A)\ ,$$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}\ ,$$

$\dots$

$$D_n(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A), & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \dots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A), & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{vmatrix}\ .$$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A. Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A. Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A. Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A.
Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

pak má funkce f v bodě A lokální maximum.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A. Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

pak má funkce f v bodě A lokální maximum.
Jsou-li všechna čísla $D_1(A),\ D_2(A), \dots\ ,\ D_n(A)$ různá od nuly a není-li splněno (1) ani (2),

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A.
Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

pak má funkce f v bodě A lokální maximum.
Jsou-li všechna čísla $D_1(A),\ D_2(A), \dots\ ,\ D_n(A)$ různá od nuly a není-li splněno (1) ani (2), pak funkce nemá v bodě A lokální extrém.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A.
Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

pak má funkce f v bodě A lokální maximum.
Jsou-li všechna čísla $D_1(A),\ D_2(A), \dots\ ,\ D_n(A)$ různá od nuly a není-li splněno (1) ani (2), pak funkce nemá v bodě A lokální extrém.

Příklad

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Věta (postačující podmínka pro lokální extrémy)
Nechť funkce f n proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě A. Je-li

$$D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ , D_n(A) > 0, \tag{1}$$

pak má funkce f v bodě A lokální minimum.
Je-li

$$-D_1(A) > 0,\ D_2(A) > 0,\ \dots\ ,\ (-1)^n D_n(A) > 0, \tag{2}$$

pak má funkce f v bodě A lokální maximum.
Jsou-li všechna čísla $D_1(A),\ D_2(A), \dots\ ,\ D_n(A)$ různá od nuly a není-li splněno (1) ani (2), pak funkce nemá v bodě A lokální extrém.

Příklad
Určete body, v nichž má lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

definovaná v R^2.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**,

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**,

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.

Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém,

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená,

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce,

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce, pak existuje globální maximum f na M.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce, pak existuje globální maximum f na M.
Nalézá se buď

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka

Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce, pak existuje globální maximum f na M.
Nalézá se buď
a) ve vnitřním bodě M (tj. v bodě v němž má f lokální maximum)

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka
Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce, pak existuje globální maximum f na M.
Nalézá se buď
a) ve vnitřním bodě M (tj. v bodě v němž má f lokální maximum)
a nebo

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Definice
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální maximum**, jestliže platí $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě A **globální minimum**, jestliže platí $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$.
Má-li funkce f v bodě A globální maximum nebo globální minimum, řekneme, že má v A **globální extrém** .

Poznámka
Má-li funkce f v nějakém vnitřním bodě svého definičního oboru $B \in D(f)$ globální extrém, pak má f v bodě B také lokální extrém téhož typu.

Je-li vyšetřovaná množina M neprázdná, uzavřená a omezená, f spojitá funkce, pak existuje globální maximum f na M.
Nalézá se buď
a) ve vnitřním bodě M (tj. v bodě v němž má f lokální maximum)
a nebo
b) na hranici (tj. v bodě v němž má f tzv. vázané maximum).

Příklad

a) kruh

Příklad

a) kruh

b) krychle

Příklad

a) kruh

b) krychle

Definice

Příklad

a) kruh

b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.

Příklad

a) kruh
b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$,

Příklad

a) kruh

b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.

Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.

Příklad
a) kruh
b) krychle

Definice
Nechť f a g jsou funkce n proměnných.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané minimum** s podmínkou $g(X) = 0$,

Příklad

a) kruh
b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané minimum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.

Příklad

a) kruh
b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané minimum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Vázaná maxima a vázaná minima nazýváme souhrnně **vázanými extrémy** .

Příklad

a) kruh
b) krychle

Definice

Nechť f a g jsou funkce n proměnných.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané maximum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \leq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Řekneme, že funkce f má v bodě A **vázané minimum** s podmínkou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a $f(X) \geq f(A)$ pro všechny body $X \in D(f)$ splňující podmínku $g(X) = 0$.
Vázaná maxima a vázaná minima nazýváme souhrnně **vázanými extrémy** . Podmínku $g(X) = 0$ nazýváme **vazba** .

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Jak hledat vázané extrémy ?

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Jak hledat vázané extrémy ?

a) Pokud je možné z rovnice $g(X) = 0$ vyjádřit některou z proměnných (např. $x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$),

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Jak hledat vázané extrémy ?
a) Pokud je možné z rovnice $g(X) = 0$ vyjádřit některou z proměnných (např. $x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$), převedeme úlohu na hledání globálního extrému nové funkce $h \ \ (n-1)$ proměnných, definované vztahem

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Jak hledat vázané extrémy ?
a) Pokud je možné z rovnice $g(X) = 0$ vyjádřit některou z proměnných (např. $x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$), převedeme úlohu na hledání globálního extrému nové funkce h $(n-1)$ proměnných, definované vztahem

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))\ .$$

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Jak hledat vázané extrémy ?
a) Pokud je možné z rovnice $g(X) = 0$ vyjádřit některou z proměnných (např. $x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$), převedeme úlohu na hledání globálního extrému nové funkce h $(n-1)$ proměnných, definované vztahem

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))\ .$$

Příklad
Určete vázané extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

s podmínkou $2x - y + 1 = 0$.

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních,

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme **Lagrangeovu metodu**.

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g\ .$$

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \ .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \,.$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0$$

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \, .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(X) = 0$$
$$\dots$$

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \, .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(X) = 0$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) = 0$$

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \, .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(X) = 0 \\
&\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) = 0 \\
&g(X) = 0
\end{aligned}$$

s $n + 1$ neznámými.

VÁZANÉ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme
Lagrangeovu metodu.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g \, .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(X) = 0 \\
&\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) = 0 \\
&g(X) = 0
\end{aligned}$$

s $n + 1$ neznámými.
Jednotlivé stacionární body funkce F pak testujeme dle Věty (postačující podmínka pro lokální extrém).

b) Nepodaří-li se najít ze vztahu $g(X) = 0$ funkční přepis pro vyjádření některé z proměnných pomocí ostatních, užijeme **Lagrangeovu metodu**.
Utvoříme novou funkci F vztahem

$$F = f + \lambda g\ .$$

Hledáme stacionární body funkce F splňující podmínku $g(X) = 0$, tj. řešíme soustavu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(X) = 0\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(X) = 0\\
&\dots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}(X) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) = 0\\
&g(X) = 0
\end{aligned}$$

s $n+1$ neznámými.
Jednotlivé stacionární body funkce F pak testujeme dle Věty (postačující podmínka pro lokální extrém).
Má-li v některém z nich F lokální extrém, pak má v něm funkce f vázaný lokální extrém téhož typu s podmínkou $g(X) = 0$.

Poznámka

Funkce f může mít vázaný lokální extrém s podmínkou $g(X) = 0$ i ve stacionárním bodě F , v němž F nemá lokální extrém.

Poznámka

Funkce f může mít vázaný lokální extrém s podmínkou $g(X) = 0$ i ve stacionárním bodě F , v němž F nemá lokální extrém.

Příklad

Určete vázané lokální extrémy

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

s podmínkou $x^2 - 2x + 2y^2 - 4y = 0$.