Matematika 2.
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
Cauchyova úloha

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.
Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.
Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.
Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.
Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Řešením diferenciální rovnice (v určitém oboru proměnné x) nazýváme každou takovou funkci $y(x)$, která spolu se svými derivacemi splňuje uvažovanou rovnici identicky (tj. pro všechna x z uvažovaného oboru).

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R.

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = x^3.2 + (2x)^3 - x.x^2 - 9x^3 = 2x^3 + 8x^3 - x^3 - 9x^3\ .$$

Příklad
Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = x^3.2 + (2x)^3 - x.x^2 - 9x^3 = 2x^3 + 8x^3 - x^3 - 9x^3 \ .$$

Graf řešení $y(x)$ nazýváme **integrální křivkou** diferenciální rovnice.

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

Příklad
Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x \ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9\sin 3x + 9\sin 3x \ .$$

Příklad

Řešení rovnice
$$y'' + 9y = 0$$
je např. funkce
$$y = \sin 3x \ .$$
Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme
$$L = -9 \sin 3x + 9 \sin 3x \ .$$
Také ale
$$y = 7 \sin 3x \ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9 \sin 3x + 9 \sin 3x\ .$$

Také ale

$$y = 7 \sin 3x\ .$$

Také ale

$$y = 8 \cos 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x \ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9 \sin 3x + 9 \sin 3x \ .$$

Také ale

$$y = 7 \sin 3x \ .$$

Také ale

$$y = 8 \cos 3x \ .$$

Obecně

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení,

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná reálná čísla.

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\; y'(x_0) = b_2,\; y^{(2)}(x_0) = b_3,\; \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1,\, 2,\, \dots, n$ jsou daná reálná čísla.

Cauchyova úloha:

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná reálná čísla.

Cauchyova úloha:
Hledáme řešení y rovnice

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = b_n.$$

Příklad:

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$
$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \, .$$

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \; .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \; .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \; .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \; .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x \; .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Odtud $C_1 = 1,\ C_2 = 2.$

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \; .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \; .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x \; .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Odtud $C_1 = 1, \; C_2 = 2$. Tedy řešení Cauchyovy úlohy je

$$y = \sin 3x + 2 \cos 3x \; .$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \ . \tag{1}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \ . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \ . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Užijeme-li, že $y' = \frac{dy}{dx}$, pak lze (3) přepsat na

$$y' = -\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \ . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Užijeme-li, že $y' = \frac{dy}{dx}$, pak lze (3) přepsat na

$$y' = -\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

a naopak (2) na tvar

$$dy - f(x, y)\, dx = 0.$$

Geometrický význam rovnice (2)

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy.

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy. Rovnice (2) nám říká, že v každém bodě roviny je dána směrnice tečny hledané křivky procházející daným bodem.

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy. Rovnice (2) nám říká, že v každém bodě roviny je dána směrnice tečny hledané křivky procházející daným bodem. Můžeme tedy zakreslit v libovolném bodě (x, y) tečnu se směrnicí $k = y' = f(x, y)$ (tzv. směrové pole).

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0)

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) \ ,$$

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y)\ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y)\ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) \ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

b)

$$\exists L > 0 \, \forall (x, y), \, (x, y_1) \in O \qquad |f(x, y_1) - f(x, y)| \leq L|y_1 - y| \ ,$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) \ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

b)

$$\exists L > 0 \, \forall (x, y), \, (x, y_1) \in O \qquad |f(x, y_1) - f(x, y)| \leq L|y_1 - y| \ ,$$

potom v jistém okolí bodu x_0 existuje jediné řešení $y = y(x)$ dané rovnice takové, že $y(x_0) = y_0$.