# Lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad (1)$$

Cauchyova úloha (2)

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad y''(a) = b_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

① zkoumám homogenní část řešení

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (3)$$

Charakteristická rovnice (4)

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

n kořenů

$\lambda_1$ ... reálný kořen násobnosti $k_1$

$$\underbrace{e^{\lambda_1 x}, \; x e^{\lambda_1 x}, \; x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, \; x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}}$$

$\alpha_1 + i\beta_1$ ... komplexní kořen násobnosti $l_1$

$$e^{\alpha_1 x} \cdot \cos(\beta_1 x), \; x e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), \; x^2 e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) \dots, \; x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x)$$

$$e^{\alpha_1 x} \cdot \sin(\beta_1 x), \; x e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \; x^2 e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \dots, \; x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x)$$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTEM ŘEŠENÍ

$y_1, y_2, \dots y_n$

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

kde $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$ libovolná

② Hledáme partikulární část řešení

$$g(x) = e^{ax}\left(P(x)\cos(bx) + Q(x)\cdot\sin(bx)\right) \qquad (5)$$

$a+ib$ ..... $k$ násobný kořen (4)

$k=0$ není-li to kořen

$k=1,2$ ... násobnost není kořenem (4)

$$y_p(x) = x^k \cdot e^{ax} \cdot \left(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx)\right) \qquad (6)$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou neznámé polynomy stupně $st = \max(st\,P(x), st\,Q(x))$

$y_p'(x) =$

$y_p''(x) =$

$\vdots$

$y_p^{(n)}(x) =$

dosadím do rovnice (1). Odtud dostaneme soustavu $n$ rovnic pro $n$ neznámých. Tu vyřešíme a výsledek dosadíme do (6)

$y_p =$ ____ (1)

③ Nalezneme obecné řešení

$$y_0 = y_h + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + y_p(x) \qquad (7)$$

(4) zvolím řešení počáteční (cauchyovy) úlohy

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \\ y_0' &= \\ y_0'' &= \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \end{aligned}\right\} \text{ dosadí za } x = a \qquad \begin{aligned} y(a) &= b_0 \\ y'(a) &= b_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(a) &= b_{n-1} \end{aligned}$$

Soustava n rovnic pro n neznámých

vyřešíme ji a dosadíme do (7)

$$\underline{\underline{y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + y_p(x)}} \quad //$$

$$y'' - y = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$$

① $y'' - y = 0$

charakteristická rovnice

$\lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

F.S.: $e^x, e^{-x}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

② $g(x) = xe^{-x}$

$a = -1 \qquad b = 0$

$a + ib = -1$ 1 násobný kořen

$k = 1 \qquad P(x) = x$

$St\, P(x) = 1$

$y_p = x \cdot e^{-x} \cdot (Ax + B) = \boxed{e^{-x}(Ax^2 + Bx)}$

$y_p' = -e^{-x}(Ax^2 + Bx) + e^{-x}(2Ax + B)$

$y_p'' = e^{-x}(Ax^2 + Bx) - e^{-x}(2Ax + B) +$

$- e^{-x}(2Ax + B) + e^{-x}\, 2A =$

$= e^{-x}(Ax^2 + Bx) - 2e^{-x}(2Ax + B) + e^{-x}\, 2A$

$\cancel{e^{-x}(Ax^2 + Bx)} - 2e^{-x}(2Ax + B) + e^{-x} \cdot 2A - \cancel{e^{-x}(Ax^2 + Bx)} = xe^{-x} \qquad / e^x$

$-2(2Ax + B) + 2A = x$

$-4Ax - 2B + 2A = x$

$x: \quad -4A = 1 \qquad A = -\frac{1}{4}$

$x^0: \quad -2B + 2A = 0$

$B = A \qquad B = -\frac{1}{4}$

$y_p = e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)$

③ obecné řešení

$$\boxed{y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{4}\right)(x^2+x)}$$

PR 2 b

$$\boxed{y'' + 3y' + 2y = (6x-1)e^x} \qquad y(0) = -1 \quad y'(0) = 1$$

① homogenní část

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

F.S. $e^{-x}, e^{-2x}$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

② hledám partikulární řešení

$$g(x) = (6x-1)e^x$$

$a = 1 \quad b = 0$

$a + ib = 1$

není kořenem

$P(x) = 6x - 1$

$\text{st } P(x) = 1$

$k = 0$

$$\boxed{y_p = e^x(Ax+B)}$$

$$y_p' = e^x(Ax+B) + e^x A$$

$$y_p'' = e^x(Ax+B) + 2e^x \cdot A$$

$$e^x(Ax+B) + 2e^x A + 3e^x(Ax+B) + 3e^x A + 2e^x(Ax+B) = (6x-1)e^x \quad / \cdot e^{-x}$$

$$6(Ax+B) + 5A = 6x - 1$$

$$6Ax + 6B + 5A = 6x - 1$$

$x: \ 6A = 6$

$x^0: \ 6B + 5A = -1$

$A = 1$

$6B + 5 = -1$

$B = -1$

$$y_p = e^x(x-1)$$

③ obecné řešení

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^x(x-1)$$

6.

(4) Určení konstant $c_1, c_2$ $\qquad y(0) = -1 \qquad y'(0) = 1$

$$y_0' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-x} + e^{x}(x-1) + e^{x}$$

$$-1 = c_1 e^0 + c_2 e^0 + e^0(0-1)$$

$$1 = -c_1 e^0 - 2c_2 e^0 + e^0(0-1) + e^0$$

$$-1 = c_1 + c_2 - 1$$

$$1 = -c_1 - 2c_2 \cancel{-1} \cancel{+1}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= -c_1 - 2c_2 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$1 = -c_2 \qquad c_2 = -1 \qquad c_1 = 1$$

$$\boxed{y(x) = e^{-x} - e^{-2x} + e^{x}(x-1)}$$

2d) $y'' - 2y' - 3y = 15\sin(3x)$ $\qquad y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$

① $y'' - 2y' - 3y = 0$

charakteristická rovnice

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

F.S.: $e^{3x}, e^{-x}$

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

② zkusím variabilní řešení

$g(x) = 15\sin(3x)$

$a = 0 \quad P(x) = 0 \quad b = 3 \quad Q(x) = 15$

$a + ib = 3i$

není $\Rightarrow k = 0$

$\boxed{y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)}$

$y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$

$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$

$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 6A\sin(3x) - 6B\cos(3x) - 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) = 15\sin 3x$

$\cos(3x): \quad -9A - 6B - 3A = 0$

$\sin(3x): \quad -9B + 6A - 3B = 15$

$-12A - 6B = 0$

$6A - 12B = 15 \quad | \cdot 2 \quad \}(+)$

$-30B = 30$

$B = -1$

$-12A + 6 = 0$

$A = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2}\cos(3x) - \sin(3x)$

8.

③ zkusím obecné řešení

$$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\cos(3x) - \sin(3x)$$

④ zkusím řešení Cauchyovy úlohy

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$$y_0' = 3c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x} - \frac{3}{2}\sin(3x) - 3\cos(3x)$$

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\cdot 1 - 0$$

$$1 = 3c_1 - c_2 - \frac{3}{2}\cdot 0 - 3\cdot 1$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= c_1 + c_2 \\ 4 &= 3c_1 - c_2 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$\frac{7}{2} = 4c_1 \qquad c_1 = \frac{7}{8}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{7}{8} + c_2 \qquad \cancel{c_2 = -1}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{-4-7}{8} = -\frac{11}{8}$$

$$\boxed{y = \frac{7}{8}e^{3x} - \frac{11}{8}e^{-x} + \frac{1}{2}\cos(3x) - \sin(3x)}$$

$y'$

$y''$

Zkouška:

spočítám $y'$, $y''$ a dosadím

$y(0) = \ldots = 0$

$y'(0) = \ldots = 1$

$L = y'' - 2y' - 3y = \ldots$

$P = 15 \sin(3x)$

$L = P$