

Matematika II (KMD/MA2) - cvičení 2

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2019/2020 a vyšší)

Příklad 1. Rozhodněte, zda lze vektor \mathbf{x} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, v kladném případě určete příslušné koeficienty:

- a) $\mathbf{x} = (-1, 0, 2, 3)$, $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{w} = (1, -4, 2, 1)$,
- b) $\mathbf{x} = (8, 3, 2)$, $\mathbf{u} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (2, 0, 3)$,
- c) $\mathbf{x} = (1, -1)$, $\mathbf{u} = (-14, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 7)$,

Příklad 2. Zjistěte, zda jsou níže uvedené vektory lineárně nezávislé:

- a) $(2, 3, -5)$, $(1, -1, 1)$, $(3, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$,
- b) $(2, 0, 3)$, $(1, -1, 1)$, $(0, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$,
- c) $(1, -1, 1, 2)$, $(1, 8, 7, -7)$, $(1, 2, 3, -1)$, $(1, 5, 5, -4) \in \mathbb{R}^4$,
- d) $(2, 1, -1, 2, -1)$, $(-4, 3, 2, -1, 1)$, $(3, 5, -2, 1, -2)$, $(2, 2, -1, 3, -1)$, $(-1, 2, 3, 1, 3) \in \mathbb{R}^5$,

Příklad 3. Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou následující vektory lineárně nezávislé:

- a) $(a, -4, -1)$, $(4, -6, -3)$, $(1, 1, -a) \in \mathbb{R}^3$,
- b) $(1, a, 1)$, $(2, 2, a)$, $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$,

Příklad 4. Z vektorů níže vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu:

- a) $(5, 7, -1, 3)$, $(1, -3, 8, 2)$, $(9, 17, -10, 4)$, $(-2, 6, -16, -4) \in \mathbb{R}^4$,
- b) $(1, 0, 2, -3)$, $(3, 2, 1, -5)$, $(-1, 2, 1, -2)$, $(-3, 0, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$,

Příklad 5. Rozhodněte, zda vektor \mathbf{x} patří do lineárního obalu množiny M :

- a) $\mathbf{x} = (1, -1, 2, 1)$, $M = \{(1, 0, 2, 2), (0, 1, 0, 2)\}$,
- b) $\mathbf{x} = (1, 4, -4, -1)$, $M = \{(0, 1, -3, 4), (2, 2, 2, 2), (1, -1, 3, 7)\}$,

Příklad 6. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^3 :

- a) $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$, $(5, 2, 1)$,
- b) $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$, $(5, 2, 5)$,
- c) $(1, 4, -1)$, $(0, 2, 3)$,

Příklad 7. Spočítejte dimenzi vektorového prostoru V , jestliže:

- a) $V = \langle (1, 1, 2, 0), (2, 1, -1, 1), (1, 2, 1, -1), (1, 3, 0, -2) \rangle$,
- b) $V = \langle (1, 2, 1, -1), (1, 1, -1, 2), (1, 0, -3, 5), (2, 3, 0, 1) \rangle$,
- c) $V = \langle (1, 1, -1, 1), (2, 1, 1, -1), (1, 0, 2, -2), (3, 2, 1, -1) \rangle$,

Příklad 8. Pro která $p \in \mathbb{R}$ je vektor \mathbf{u} prvkem lineárního obalu množiny M ? Nalezněte nějakou bázi prostoru $\langle M \rangle$ a určete jeho dimenzi.

- a) $\mathbf{u} = (7, -2, p)$, $M = \{(2, 3, 5), (3, 7, 8), (1, -6, 1)\}$,
- b) $\mathbf{u} = (p, 6, 0)$, $M = \{(2, 3, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$,

Příklad 9. Určete souřadnice vektoru \mathbf{x} vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$:

- a) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$,
- b) $\mathbf{x} = (1, 3, 6)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 1)$,
- c) $\mathbf{x} = (4, 4, -6, -18)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, -1, 2, 7)$, $\mathbf{w} = (2, -1, 0, 1)$,