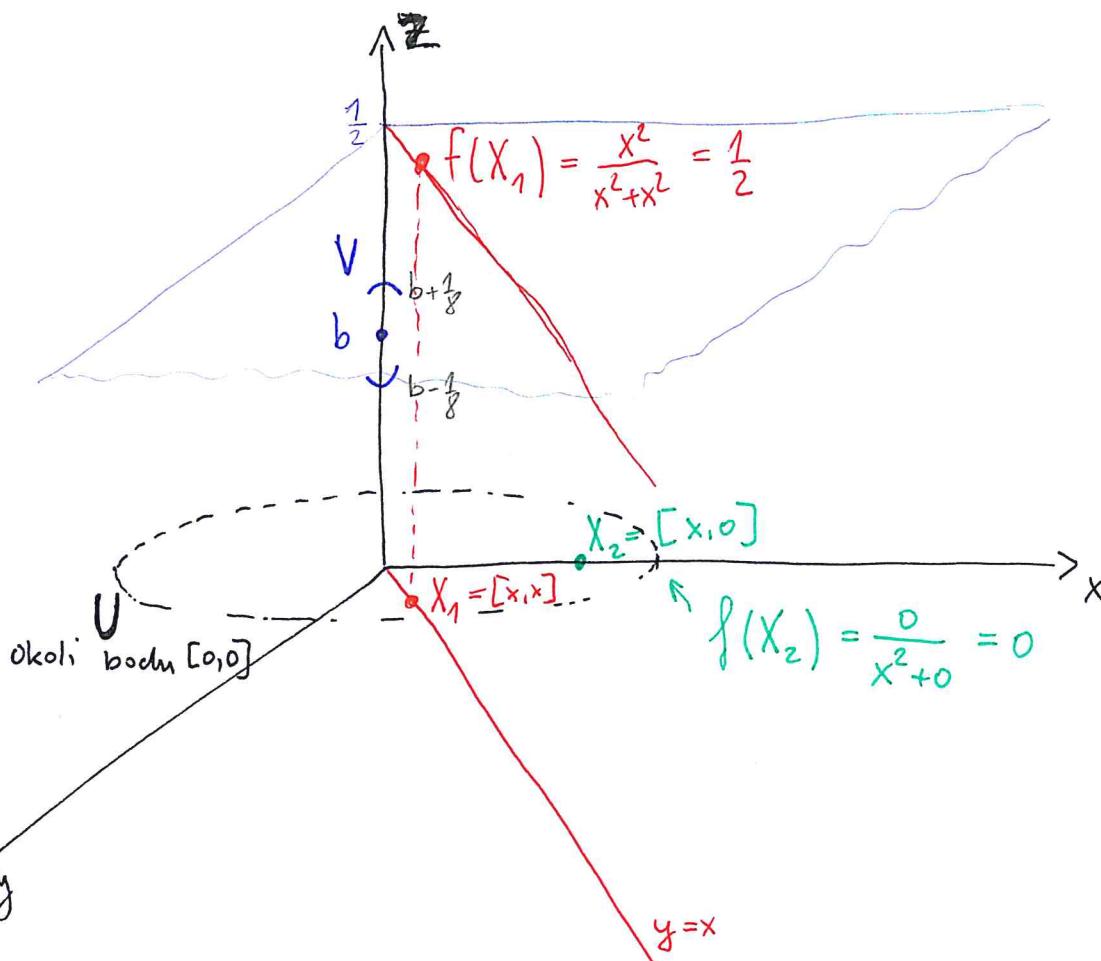


dle definice

$f$  má v  $A \in E_2$  limitu  $b$ , jestliže

$\nexists V$  okoli  $b \quad \exists U$  okoli  $A$  tak, že  $[X \in U, X \neq A \Rightarrow f(X) \in V]$



Úkolem je najít  $b \in \mathbb{R}$  takové, aby pro každé  $V$  okoli  $b$  existovalo  $U$  okoli  $[0,0]$  takové, že  $[X \in U, X \neq [0,0] \Rightarrow f(X) \in V]$

Toto má platit pro každé  $V$ , tedy i pro  $V = (b - \frac{1}{8}, b + \frac{1}{8})$

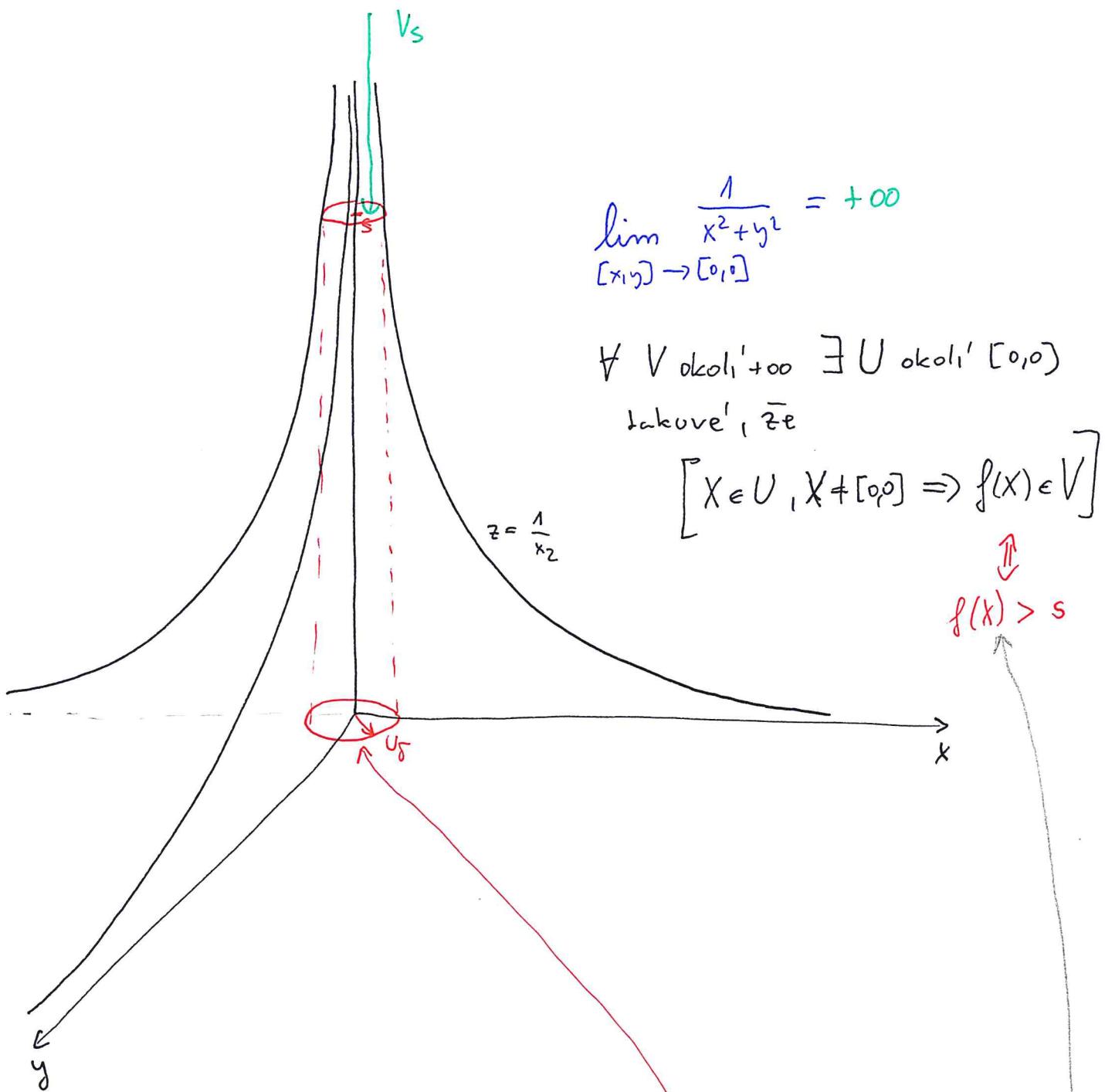
Ale

$$\text{j.e.-li } X_1 = [x, x] \neq [0,0] \Rightarrow f(X_1) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

a

$$\text{j.e.-li } X_2 = [x, 0] \neq [0,0] \Rightarrow f(X_2) = \frac{0}{x^2+0} = 0$$

Tato čísla  $\frac{1}{2}, 0$  nemohou obě ležet v okolí  $V = (b - \frac{1}{8}, b + \frac{1}{8})$   
tedy číslo  $b$  požadovaných vlastností neexistuje  
t.j. limita neexistuje



$s$ -okoli  $+\infty$  má tvar  $V_s = (s, +\infty)$

- 1) Je-li  $s \leq 0$  potom  $U$  může být libovolné
- 2) Je-li  $s > 0$  potom  $U_{\frac{1}{\sqrt{s}}}([0,0])$  (poloměr okoli  $U_s$  je  $\delta = \frac{1}{\sqrt{s}}$ )  
 neboť  $X \in U_{\frac{1}{\sqrt{s}}}([0,0])$  tak  $0 < d(X, [0,0]) = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\sqrt{s}}$   
 $0 < x^2+y^2 < \frac{1}{s}$   
 $s < \frac{1}{x^2+y^2} = f(X)$   
 $f(X) \in V_s$

### Příklad

Vyšetřete spojitost funkce  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  v bodě  $[0,0]$ .

### Rешение

$f$  je složenou funkcí  $f = h(g)$

-vnitřní funkce  $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$  je polynom a

ten je spojitý v  $\mathbb{E}_2$  (tedy i v bodě  $[0,0]$ )

navíc  $g(0,0) = 1$

-vnější funkce  $h(x) = \sqrt{x}$  je spojite na  $\langle 0, +\infty \rangle$   
tedy i v bodě 1

Dohromady dle Věty 2.5. je tedy  $f(x,y) = h(g(x,y))$  spojitá v bodě  $[0,0]$ .



## Příklad

Urcete parciální derivace funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

:

$2y^2$  je konstanta při derivaci dle  $x$

## Řešení

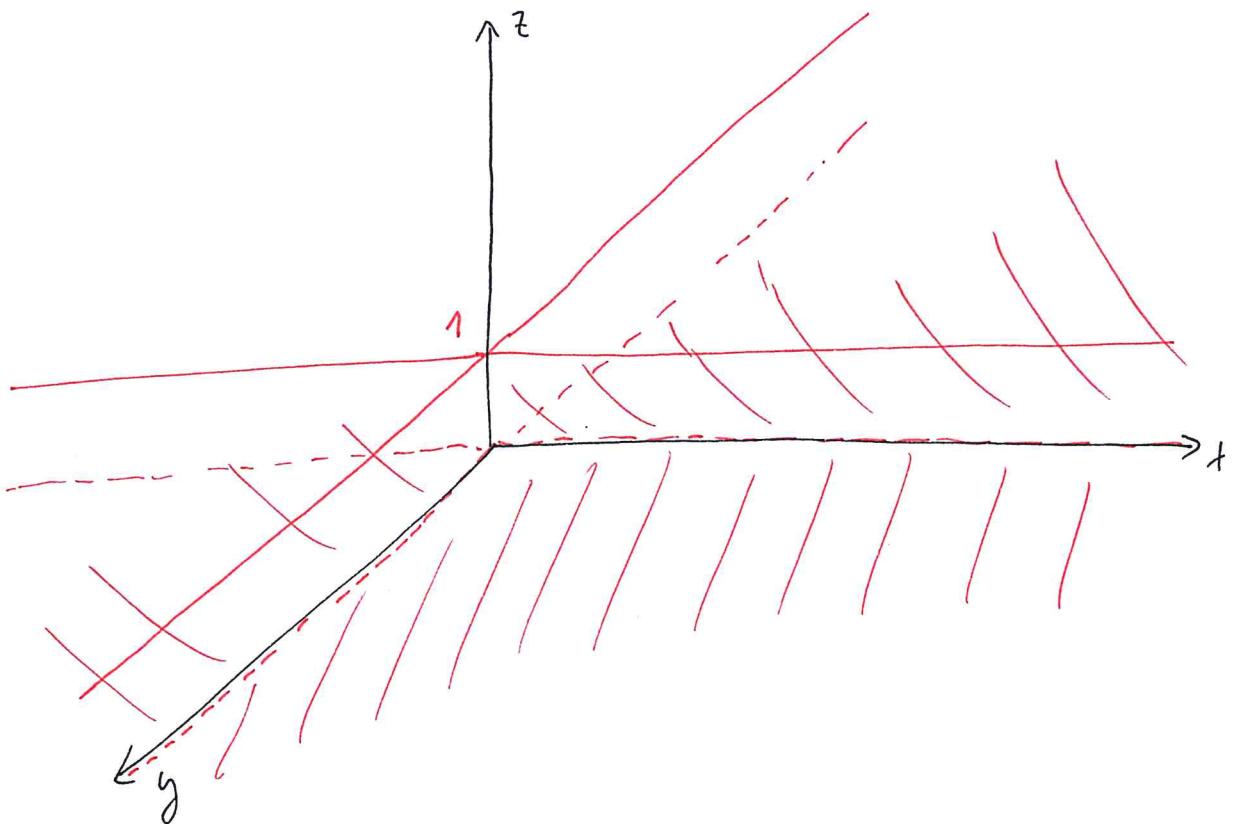
Derivujeme parciálně podle  $x$ , tuk s  $y$  pracujeme jako by to bylo konstanta (nebo parametr)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y$$

Derivujeme parciálně podle  $y$ , tuk s proměnnou  $x$  pracujeme jako s parametrem  
 $x^2 \dots$  je konstanta

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 4y$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \text{ a současné } y \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x=0 \text{ nebo } y=0 \end{cases}$$



hodnota 0 vžude až na osy  $x$  a  $y$   
na nich je hodnota 1.

na ose  $y$  (tam je  $x=0$ )  $\quad g(y) = 1$

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = g'(y) = \boxed{\cancel{\dots}} \quad 0$$

na ose  $x$  (tam je  $y=0$ )  $\quad g(x) = 1$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = g'(x) = 0$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

diferencovatelnost v bodě A = [1,2] ?

Dle Věty 3.3 je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y \quad \text{spojuje funkce } \sim E_2 \text{ (polynom)}$$

tedy i v bodě A

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 4y \quad \text{spojuje funkce } \sim E_2 \text{ (polynom)}$$

tedy i v bodě A

Věta 3.3  
⇒ f je diferencovatelná v bodě A.

Určete tečnu rovinu plochy

$$z = x^2 + xy + 2y^2$$

v bode  $T = [1, 2, ?]$ .

---

Dosaďme do výrazu

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-a_2)$$

$A = [1, 2]$  --- složky  $x, y$  bodem  $T$

$$f(A) = 1^2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 11$$

tedy  $T = [1, 2, 11]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 4y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

tečnu rovinu

$$z = 11 + 4(x - 1) + 9(y - 2)$$

tedy

$$\underline{\underline{z = 4x + 9y - 11}}$$