Matematika 1B (Fakulta strojní)

Cvičení z matematické analýzy

TU v Liberci

Jiří Hozman

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

8. dubna 2019

Kapitola 1

Metrické prostory a posloupnosti v metrických prostorech

Příklad 1.1. Klasifikujte následující množiny a určete jejich diametr vzhledem k euklidovské normě (metrice):

a) $A = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : 2y - x < 6,\ 3x + 2y > 5, x - y < 8\}$ [otevřená]

b) $B = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : 2y - x \leq 6,\ 3x + 2y \geq 5, x - y \leq 8\}$ [uzavřená]

c) $C = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : 2y - x < 6,\ 3x + 2y \geq 5, x - y < 8\}$ [ani otevřená, ani uzavřená]

d) $D = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x - 1,\ y \geq x - 1, y < 1\}$ [ani otevřená, ani uzavřená, 4]

e) $E = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : y > -x - 1,\ y > x - 1, y < 1\}$ [otevřená, 4]

f) $F = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x - 1,\ y \geq x - 1, y \leq 1\}$ [uzavřená, 4]

Příklad 1.2. Popište množinu splňující následující podmínky:

a) $\|\boldsymbol{x}\| = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ [jednotková kružnice]

b) $\|\boldsymbol{x}\| = 2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ [kulová plocha o poloměru 2]

c) $\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 9,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ [kruh o poloměru 3]

d) $\|\boldsymbol{x}\| \leq 3,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ [koule o poloměru 3]

e) $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ [kosočtverec s těžištěm v počátku]

f) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ [osmistěn s těžištěm v počátku]

g) $\|\boldsymbol{x}\|_{\max} = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ [čtverec s těžištěm v počátku]

h) $\|\boldsymbol{x}\|_{\max} \leq 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ [krychle s těžištěm v počátku]

Příklad 1.3. Klasifikujte následující množiny a určete jejich vnitřek, hranici a uzávěr:

a) $A = \langle -1; 1\rangle^2 \setminus \{[0; 0]\}$ []

b) $B = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ []

c) $C = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ []

d) $D = \langle -1; 1\rangle^2 \cup \{[2; 2]\}$ []

Příklad 1.4. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti v prostoru $\mathbb{R}^m$ omezené:

a) $\boldsymbol{a}_n = \left(2, \dfrac{1}{n+1}, \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n-1}, \sin n\right)$ []

b) $\boldsymbol{a}_n = \big(\cos(n\pi), 5, (-1)^n n, n^2 + 3n + 1\big)$ []

c) $\boldsymbol{a}_n = \left(2, \dfrac{1}{2n+1}, \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{4n-1}, \sin(2n)\right)$ []

Příklad 1.5. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{3n^2+2n+3}, \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}, \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} n\right)^n\right)$ $\left[\left[\dfrac{1}{3}, e^2, e^{-\frac{2}{\pi}}\right]\right]$

Kapitola 2

Funkce více proměnných

Příklad 2.1. Určete definiční obory následujících funkcí a klasifikujte je (otevřená, uzavřená, omezená množina):

a) $f(x,y,z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ [vnitřek koule o poloměru 1]

b) $f(x,y,z) = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [vně kužele]

c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [jednotkový kruh]

d) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}\right)$ [část roviny $I\!R^2$ vně dvou jednotkových kružnic se středy $[\pm 1; 0]$]

e) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ [čtverec]

f) $f(x,y) = \sqrt{\sin x \cos y}$ $\left[\cup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle \times \cup_{l\in\mathbb{Z}}\langle -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi\rangle,\right.$ $\left.\cup_{k\in\mathbb{Z}}\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\rangle \times \cup_{l\in\mathbb{Z}}\langle \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2l\pi\rangle\right]$

g) $f(x,y) = \dfrac{1}{25 - x^2 - y^2}$ [rovina $I\!R^2$ bez kružnice se středem $[0;0]$ a poloměrem 5]

h) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ [kruh se středem v počátku a poloměrem 3]

i) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$ []

j) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{-x^2-y^2+2x}}$ []

k) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{|y+z|}$ []

l) $f(x,y) = \ln(x \sin y)$ $\left[\cup_{k\in\mathbb{Z}} (0,+\infty) \times \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle,\right.$ $\left.\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\infty, 0) \times \langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\rangle\right]$

m) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$ [rovinný pás vymezený dvěma rovnoběžnými přímkami $y = -x \pm 1$ včetně přímek $y = -x \pm 1$]

n) $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ [rovinný pás vymezený dvěma rovnoběžnými přímkami $y = \pm 1$ včetně přímek $y = \pm 1$]

o) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ [rovina $I\!R^2$]

p) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ [vně a včetně jednotkové kružnice se středem $[0;0]$]

q) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+2x-2y+2}$ [rovina $I\!R^2$ bez bodu $[-1;1]$]

r) $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$ [uzávěr vnitřku elipsy]

s) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(-x^2-y^2+6x)(x^2+y^2-6y)}}{2}$ [uzávěr vnitřku dvou kruhů bez vnitřku jejich průniku]

Příklad 2.2. Určete definiční obory následujících funkcí a klasifikujte je (otevřená, uzavřená, omezená množina):

a) $f(x,y)=\arccos(x^2+y^2-1)+\sqrt{|x|+|y|-\sqrt{2}}$ []

b) $f(x,y)=\ln(y\ln(y-x))$ []

c) $f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)+\arcsin(1-y)$ []

d) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

[průnik vnitřku jednotkového kruhu a uzávěru vnitřku paraboly]

e) $f(x,y)=\sqrt{\sin(\pi(x^2+y^2))}$ []

f) $f: y=\ln(y\ln(y-x))$ []

Příklad 2.3. Nalezněte konstantní hladiny a vrstevnice (popř. popište graf) následujících funkcí:

a) $f(x,y)=xy$ [soustředné hyperboly a souřadnicový kříž]

b) $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [kuželové plochy]

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ [kružnice]

d) $f(x,y)=x^2+y^2$ [kružnice]

e) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$ [kružnice]

f) $f(x,y)=x^2+y^2+z^2$ [kulové plochy]

g) $f(x,y)=\dfrac{1}{25-x^2-y^2}$ [kružnice]

h) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ [kružnice]

i) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$ [kulové plochy]

j) $f(x,y)=x^2+y^2-2x$ [soustředné kružnice a bod $[1;0]$, (rotační paraboloid)]

k) $f(x,y,z)=x+y+z$ [roviny]

l) $f(x,y)=x+y$ [přímky]

m) $f(x,y)=x^2$ [rovnoběžné přímky, (rovina)]

n) $f(x,y)=\sqrt{xy}$ [hyperboly]

o) $f(x,y)=x^2-y^2$ [hyperboly]

p) $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ [elipsy]

Příklad 2.4. Klasifikujte tělesa (plochy, roviny, přímky, body) v prostoru $I\!R^3$ dle příslušných rovnic:

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} + z^2 = 1$ [elipsoid]

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ [kulová plocha]

c) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ [elipsoid]

d) $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 9$ [jednodílný hyperboloid]

e) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = -9$ [dvojdílný hyperboloid]

f) $x^2 + 4y^2 = 36z^2$ [kuželová plocha]

g) $y^2 + z^2 = x^2$ [rotační kuželová plocha]

h) $x^2 + 4y^2 = 36z$ [eliptický paraboloid]

i) $x^2 + y^2 = z$ [rotační parabolid]

j) $4x^2 - 9y^2 = 49z$ [hyperbolický paraboloid]

k) $x^2 + 4y^2 = 16$ [eliptická válcová plocha]

l) $x^2 + z^2 = 1$ [rotační válcová plocha]

m) $x^2 - 4z^2 = 16$ [hyperbolická válcová plocha]

n) $x^2 = -y$ [parabolická válcová plocha]

o) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ [bod $[0, 0, 0]$]

p) $x + 2y + 5z - 16 = 0$ [rovina]

q) $x^2 + y^2 = 0$ [osa z]

Příklad 2.5. Určete následující limity:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{y}$ [0]

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$ [4]

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ [0]

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1+xy}{1-xy}$ [−3]

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2}$ [1]

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ [0]

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ [neex.]

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ [1]

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [$\ln 2$]

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ [neex.]

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$ [0]

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$ [1]

n) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^2)}{xyz}$ [0]

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} (x^2+xy+y^2)$ [7]

p) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}$ [0]

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{|x-y|}$ [$+\infty$]

r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ [neex.]

s) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ [neex.]

t) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+3}{2x-y+7}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

u) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^3-y3}{x^4+y^4}$ $\left[\dfrac{3}{16}\right]$

v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{1}{(x+1)^2+(y+1)^2}$ [$+\infty$]

w) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{1}{(x+1)^3+(y+1)^3}$ [neex.]

x) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ [12]

y) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+|x|+|y|)^{\frac{3}{|x|+|y|}}$ [e^3]

z) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ [neex.]

Příklad 2.6. Ověřte na základě definice limity:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,1)} x^2 + 3y^2 = 19$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy} = 1$

Příklad 2.7. Rozhodněte o spojitosti následujících funkcí:

a) $f(x,y) = e^{x+y}\sqrt{x^2+y^2} + \cos(x-y)$ [spojitá v $I\!R^2$]

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ [nespojitá v $[0;0]$]

c) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ [nespojitá v $[0;0]$]

Příklad 2.8. Rozhodněte, zda funkce mohou být spojitě rozšířeny na $I\!R^2$, resp. na $I\!R^3$:

a) $\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ [ano]

b) $\dfrac{xy}{|x|+|y|}$ [ano]

c) $\dfrac{yz-x}{x^2+y^2}$ [ne]

Kapitola 3

Parciální derivace a jejich užití

Příklad 3.1. Vypočtěte parciální derivace funkce f v obecném bodě a vyčíslete je v daných bodech:

a) $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 5xy + 3x - 1,\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [2;-3],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 5y + 3,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 5x\right]$

b) $f(x,y) = x\sin^2 y,\ \boldsymbol{a} = [1;\pi],\ \boldsymbol{b} = [-2;\pi/4],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x\sin y\cos y\right]$

c) $f(x,y) = \cos(2x-y),\ \boldsymbol{a} = [0;\pi/3],\ \boldsymbol{b} = [-\pi,\pi/2],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x-y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(2x-y)\right]$

d) $f(x,y) = e^x\sin(2y),\ \boldsymbol{a} = [0;0],\ \boldsymbol{b} = [-1;\pi/4],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x\sin(2y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2e^x\cos(2y)\right]$

e) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2}),\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [2;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y},\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [2;-1],\ \boldsymbol{c} = [0;-3],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right]$

g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y},\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [0;-2],\ \boldsymbol{c} = [1;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\right]$

h) $f(x,y) = x^y,\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [2;0],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},\ \dfrac{\partial f}{\partial y =} e^{y\ln x}\ln x = x^y\ln x\right]$

i) $f(x,y) = \sqrt{x-y^2+1},\ \boldsymbol{a} = [4;1],\ \boldsymbol{b} = [-1;-3],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-y^2+1}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{x-y^2+1}}\right]$

j) $f(x,y) = x + \dfrac{1}{y},\ \boldsymbol{a} = [0;1],\ \boldsymbol{b} = [1;-1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}\right]$

Příklad 3.2. Vypočtěte parciální derivace funkce f v obecném bodě a vyčíslete je v daných bodech:

a) $f(x,y,z)=2x^2yz+3xy^2+6xz-5,\ \boldsymbol{a}=[1;-1;2],\ \boldsymbol{b}=[0;2;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=4xyz+3y^2+6z,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2z+6xy,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2x^2y+6x\right]$

b) $f(x,y,z)=\ln(x+2y-3z+5),\ \boldsymbol{a}=[1;0;-1],\ \boldsymbol{b}=[0;0;0],\ \boldsymbol{c}=[1;-2;4],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{x+2y-3z+5},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{x+2y-3z+5},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{-3}{x+2y-3z+5}\right]$

c) $f(x,y,z)=\cos(3x-5y+6z-2),\ \boldsymbol{a}=[0;\pi;2],\ \boldsymbol{b}=[-2\pi;2;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=-3\sin(3x-5y+6z-2),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=5\sin(3x-5y+6z-2),\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-6\sin(3x-5y+6z-2)\right]$

d) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \boldsymbol{a}=[1;-1;2],\boldsymbol{b}=[-1;0;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$

e) $f(x,y,z)=x^2\sin(2y-z),\ \boldsymbol{a}=[1;0;0],\ \boldsymbol{b}=[1;0;\pi],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\sin(2y-z),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2\cos(2y-z),\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-x^2\cos(2y-z)\right]$

f) $f(x,y,z)=(x-yz)^{xy},\ x>yz,\ \boldsymbol{a}=[1;0],\ \boldsymbol{b}=[2;-1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=(x-yz)^{xy}y\left(\ln(x-yz)+\dfrac{x}{x-yz}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=(x-yz)^{xy}y\left(\ln(x-yz)-\dfrac{yz}{x-yz}\right),\right.$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}=-xy^2(x-yz)^{xy-1}\right]$

g) $f(x,y,z)=xy^2z^5,\ \boldsymbol{a}=[2;1;1],\ \boldsymbol{b}=[0;0;0],\qquad \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2z^5,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xyz^5,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=5xy^2z^4\right]$

g) $f(x,y,z)=\cosh(xy-z),\ \boldsymbol{a}=[-1;1;1],\ \boldsymbol{b}=[1;0;1],$

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}=,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\right]$

Příklad 3.3. Určete vektor grad f v obecném bodě a v daných bodech:

a) $f(x,y)=4xy^2-6xy+5,\ \boldsymbol{a}=[1;-1],\ \boldsymbol{b}=[0;0],\qquad [\operatorname{grad} f=(4y^2-6y;\,8xy-6x)]$

b) $f(x,y)=\dfrac{2x+3y-5}{x-y+2},\ \boldsymbol{a}=[2;0],\ \boldsymbol{b}=[1;3],\qquad \left[\operatorname{grad} f=\left(\dfrac{9-5y}{(x-y+2)^2};\dfrac{5x+1}{(x-y+2)^2}\right)\right]$

c) $f(x,y)=\ln(e^x+2x-3y),\ \boldsymbol{a}=[1;-1],\ \boldsymbol{b}=[-1;2],\qquad \left[\operatorname{grad} f=\left(\dfrac{e^x+2}{e^x+2x-3y};\dfrac{-3}{e^x+2x-3y}\right)\right]$

Příklad 3.4. Určete, ve kterých bodech je vektor grad f nulový:

a) $f(x,y)=3x^2-5xy+4y^2-6x+5y,\qquad [[1;0]]$

b) $f(x,y)=\ln(x^2+2x+y^2-4xy+4y+6),\qquad \left[\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right]\right]$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2-4x+y^2+6y+4},\qquad [\operatorname{grad} f(x,y)\neq(0;0)\ \forall\,[x;y]\in D_f]$

Příklad 3.5. Určete hodnotu směrové derivace $\partial_{\vec{u}} f$ v bodě $[1,1]$ pro obecný vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\| = 1$:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $\left[\partial_{\vec{u}} f = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} u_1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} u_2\right]$

b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $\left[\partial_{\vec{u}} f = \dfrac{1}{2} u_1 + \dfrac{1}{2} u_2\right]$

Příklad 3.6. Určete, zda funkce $f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{u}$ roste či klesá a určete rychlost změny, je-li

a) $f(x,y) = \ln(x^2 y + 1)$, $\boldsymbol{a} = [1;2]$, $\vec{u} = (1;-1)$, $\left[\text{roste rychlostí } \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, $\boldsymbol{a} = [3;4]$, $\vec{u} = (1;1)$, $\left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-10}{\sqrt{2}}\right]$

c) $f(x,y) = \dfrac{2x + 3y - 5}{x - y + 2}$, $\boldsymbol{a} = [2;0]$, $\vec{u} = (2;-3)$, $\left[\text{klesá rychlostí } \dfrac{-15}{16\sqrt{13}}\right]$

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $\boldsymbol{a} = [-1;1]$, $\vec{u} = (2;1)$, $\left[\text{roste rychlostí } \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right]$

Příklad 3.7. Pro funkci $f(x,y)$ určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce v bodě $\boldsymbol{a}$ nejvíce roste a určete rychlost růstu, je-li

a) $f(x,y) = 2x^2 - 3y + 5$, $\boldsymbol{a} = [1;2]$, $\left[\vec{s} = \dfrac{1}{5}(4;-3), \text{ rychlost je } 5\right]$

b) $f(x,y) = e^{x^2 - y}$, $\boldsymbol{a} = [1;-1]$, $\left[\vec{s} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;-1), \text{ rychlost je } e^2\sqrt{5}\right]$

c) $f(x,y) = \dfrac{2x + 3y - 5}{x - y + 2}$, $\boldsymbol{a} = [2;0]$, $\left[\vec{s} = \dfrac{1}{\sqrt{202}}(9;11), \text{ rychlost je }\right]$

d) $f(x,y) = \arcsin(2x + y)$, $\boldsymbol{a} = \left[\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$ $\left[\vec{s} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2;1), \text{ rychlost je } \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right]$

Příklad 3.8. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f = f(x,y)$ v bodě $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$, je-li:

a) $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2 y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10$, $\boldsymbol{a} = [1,-1]$, $[12x - 7y - z - 10 = 0]$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $\boldsymbol{a} = [1,1]$, $[x - y - z + 1 = 0]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\boldsymbol{a} = [4,-3]$, $[4x - 3y - 5z = 0]$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$, $\boldsymbol{a} = [2,3]$, $[4x - 6y - z + 10 = 0]$

e) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $\boldsymbol{a} = [1,1]$, $[4x + 2y - z - 3 = 0]$

f) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $\boldsymbol{a} = [1,1]$, $[2x - 2y - 4z + \pi = 0;]$

g) $f(x,y) = x^4 + 2x^2 y - xy + x$, $\boldsymbol{a} = [1,?]$, $f(\boldsymbol{a}) = 2$, $[5x + y - z - 3 = 0]$

h) $f(x,y) = xy$, $\boldsymbol{a} = [?,2]$, $f(\boldsymbol{a}) = 2$, $[2x + y - z - 2 = 0]$

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $\boldsymbol{a} = [3,4]$, $[17x + 11y + 5z - 60 = 0]$

Příklad 3.9. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je rovnobežná s rovinou ρ, je-li:

a) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 5$, $\rho : 4x - 12y + z = 3$, $[4x - 12y + z + 5 = 0]$

b) $f(x,y) = 2x^2 y + 5$, $\rho : 8x + 2y - z = 0$, $[8x + 2y - z - 3 = 0,\ 8x + 2y - z + 13 = 0]$

Příklad 3.10. Určete rovnici tečné roviny ke grafu fukce $f(x,y)$, která je kolmá na přímku p, je-li:

a) $f(x,y) = xy$, $p : X = [-2;-2;1] + t(2;1;-1)$, $[4x - 12y + z + 5 = 0]$

Příklad 3.11. Najděte totální diferenciály $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y)$ a $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{b}}(x,y)$ v příslušných bodech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ pro následující funkce:

a) $f(x,y) = e^{-x}\cos y,\ \boldsymbol{a} = [1;\pi],\ \boldsymbol{b} = [0;\pi/2],$

$\left[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = \frac{1}{e}(x-1)\right]$

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ \boldsymbol{a} = [2;0],\ \boldsymbol{b} = [1;-3],$

$[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = x-2]$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ \boldsymbol{a} = [0;2],\ \boldsymbol{b} = [-1;4],$

$\left[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = \frac{1}{2}x,\ \mathrm{d}f_{\boldsymbol{b}}(x,y) = \frac{4}{17}(x+1) + \frac{1}{17}(y-4)\right]$

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy),\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [2;-1],$

$[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = y]$

e) $f(x,y) = x^{xy},\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [0;-2],$

$[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = -(x-1),\ \mathrm{d}f_{\boldsymbol{b}}(x,y)$ neexistuje$]$

f) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y},\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [2;0],$

$[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y)$ neexistuje, $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{b}}(x,y)$ neexistuje$]$

g) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [2;0],$

$\left[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{a}}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{8}}\,x + \frac{1}{\sqrt{8}}\,y + \frac{2}{\sqrt{8}}\right]$

Příklad 3.12. Rozhodněte, zda jsou funkce diferencovatelné v daném bodě $\boldsymbol{x}_0$:

a) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f(0,0) = 0,\ \boldsymbol{x}_0 = [0,0],$ []

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3},\ \boldsymbol{x}_0 = [0,0],$ []

c) $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}},\ \boldsymbol{x}_0 = [0,0]$ []

Příklad 3.13. Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu (na 4 platné cifry):

a) $(1.03)^{0.97}$ [$\doteq$] b) $\ln(1.02)\ln(1.01)$ [$\doteq$] c*) $\sqrt{1.003}\cdot\operatorname{arctg}(1.01)$ [$\doteq$]

Příklad 3.14. Vypočtete první parciální derivace funkce:

a) $F(x,y) = f(u,v),\ u = x^2+y,\ v = x-y,$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right]$

b) $F(x,y) = f(u,v),\ u = x+2\sqrt{y},\ v = x-2\sqrt{y},$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{y}}\right]$

c) $F(x,y) = f(u,v),\ u = xy,\ v = \frac{x}{y},$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,y + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{y},\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,x + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{-x}{y^2}\right)\right]$

d) $F(x,y) = f(u,v),\ u = x^2-y^2,\ v = xy,$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,2x + \frac{\partial f}{\partial v}\,y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,(-2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\,x\right]$

e) $F(x,y) = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2},$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},\ \frac{\partial F}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}\right]$

Příklad 3.15. Spočtěte $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, je-li:

a) $z = x^2 + xy + y^2$ a $x = \sin t,\ y = \cos t,$ $[\cos 2t]$

b) $z = e^{xy} \ln(x + y)$ a $x = t^3,\ y = 1 - t^3,$ $[0]$

Příklad 3.16. Ověřte, že funkce $f(x, y)$ vyhovuje příslušné rovnici, je-li:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\quad y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0,$

b) $f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2),\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xz,$

Příklad 3.17. Do níže uvedených rovnic zaveďte nové proměnné $F(x, y) = f$:

a) $(x + y)\dfrac{\partial F}{\partial x} - (x - y)\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ u = \ln\sqrt{x^2 + y^2},\ v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},$

[]

b) $y\dfrac{\partial F}{\partial x} - x\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},$

$[0 = 0]$

c) $y\dfrac{\partial F}{\partial x} + x\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ r = x^2 - y^2,$

$[0 = 0]$

d) $y\dfrac{\partial F}{\partial x} - x\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ t = x^2 + y^2,$

$[0 = 0]$

e) $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},$

$[rf'(r) = 0]$

f) $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = F,\ u = x,\ v = \dfrac{y}{x},$

[]

g) $x\dfrac{\partial F}{\partial y} - y\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ (transformace do polárních souřadnic)

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = 0\right]$

h) $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ (transformace do polárních souřadnic)

$\left[\rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho} = 0\right]$

i) $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ (transformace do polárních souřadnic)

$\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = 0\right]$

Kapitola 4

Derivace vyšších řádů a jejich vlastnosti

Příklad 4.1. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v obecném bodě a vyčíslete je v daných bodech:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^3 - 4x + 2y + 5,\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [-1;2],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 9y^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18xy\right]$

b) $f(x,y) = \ln(x + 2y),\ \boldsymbol{a} = [2;1],\ \boldsymbol{b} = [0;-1],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x+2y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{-2}{(x+2y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-4}{(x+2y)^2}\right]$

c) $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 3y - 10,\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [0,0],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x - 4y,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 10y - 4x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10x\right]$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y},\ \boldsymbol{a} = [1;3],\ \boldsymbol{b} = [-3;0],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}\right]$

e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ \boldsymbol{a} = [1;0],\ \boldsymbol{b} = [-1;1],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y},\ \boldsymbol{a} = [-2;3],\ \boldsymbol{b} = [1;-1],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y)^3}},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{-1}{4\sqrt{(x^2+y)^3}},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-x}{2\sqrt{(x^2+y)^3}}\right]$

g) $f(x,y) = 3\cos(2x - 3y + 5),\ \boldsymbol{a} = [2\pi;-\pi],\ \boldsymbol{b} = \left[\dfrac{\pi}{2};-\pi\right],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12\cos(2x - 3y + 5),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18\cos(2x - 3y + 5),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -27\cos(2x - 3y + 5)\right]$

h) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy),\ \boldsymbol{a} = [1;-1],\ \boldsymbol{b} = [2;0],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{1 - x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}\right]$

i) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right),\ \boldsymbol{a} = [0;0],\ \boldsymbol{b} = [1;-1],$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 1},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{2y}{y^4 + 2y^2 + 1}\right]$

Příklad 4.2. Najděte diferenciály druhého řádu $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(x,y)$ a $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{b}}(x,y)$ v příslušných bodech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ pro následující funkce:

a) $f(x,y) = x^2y + \ln(x+2y+1)$, $\boldsymbol{a} = [0;0]$, $\boldsymbol{b} = [1;-1]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - \dfrac{1}{(x+2y+1)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{-4}{(x+2y+1)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - \dfrac{2}{(x+2y+1)^2}\right]$

b) $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$, $\boldsymbol{a} = [0;0]$, $\boldsymbol{b} = [1;0]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\right]$

c) $f(x,y) = e^{x^2-y}$, $\boldsymbol{a} = [1;1]$, $\boldsymbol{b} = [1;0]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2-y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2xe^{x^2-y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^2-y}\right]$

d) $f(x,y) = 3xy + 6x - 5y + 7$, $\boldsymbol{a} = [0;0]$, $\boldsymbol{b} = [2;3]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\right]$

e) $f(x,y) = e^x \sin y$, $\boldsymbol{a} = [0;0]$, $\boldsymbol{b} = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \cos y,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y\right]$

f) $f(x,y) = 3x - 2y + 5 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, $\boldsymbol{a} = [1;1]$, $\boldsymbol{b} = [2;0]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2y}{x^3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}\right]$

g) $f(x,y) = \sin(2x+y)$, $\boldsymbol{a} = [0;0]$, $\boldsymbol{b} = [0;\pi]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\sin(2x+y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\sin(2x+y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(2x+y),\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a};\mathbf{h}) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{b};\mathbf{h}) = 0\right]$

h) $f(x,y) = \ln(x-y)$, $\boldsymbol{a} = [1;0]$, $\boldsymbol{b} = [2;1]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x-y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{(x-y)^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(x-y)^2},\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a};\mathbf{h}) = -h_1^2 + 2h_1h_2 - h_2^2,\right.$
$\left.\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{b};\mathbf{h}) = -h_1^2 + 2h_1h_2 - h_2^2\right]$

i) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $\boldsymbol{a} = [1;1]$, $\boldsymbol{b} = [1;0]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{4y}{(x+y)^3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{2x-2y}{(x+y)^3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{4y}{(x+y)^3}\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a};\mathbf{h}) = -\dfrac{1}{2}h_1^2 + \dfrac{1}{2}h_2^2,\right.$
$\left.\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{b};\mathbf{h}) = 4h_1h_2 + 4h_2^2\right]$

j) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$, $\boldsymbol{a} = [0;1]$, $\boldsymbol{b} = [0;0]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =\right]$

k) $f(x,y) = x\sin^2 y$, $\boldsymbol{a} = [1;0]$, $\boldsymbol{b} = [1;\pi/2]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\sin y \cos y,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x(\cos^2 x - \sin^2 y),\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a};\mathbf{h}) = 2h_2^2,\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{b};\mathbf{h}) = -2h_2^2\right]$

l) $f(x,y) = y^{\ln x}$, $\boldsymbol{a} = [1;1]$, $\boldsymbol{b} = [1;e]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} =,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =\right]$

m) $f(x,y) = xy^2 - x^2y$, $\boldsymbol{a} = [1;1]$, $\boldsymbol{b} = [2;1]$,
$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a};\mathbf{h}) = -2h_1^2 + 2h_2^2,\ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{b};\mathbf{h}) = -2h_1^2 - 4h_1h_2 + 2h_2^2\right]$

Příklad 4.3. Ověřte, že funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$ vyhovuje příslušné rovnici, je-li:

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{y^2-a^2x^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$

c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$

d) $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}.$

Příklad 4.4. Do níže uvedených rovnic zaveďte nové proměnné $F(x,y) = f(u,v)$ (předpokládejte záměnnost smíšených derivací):

a) $x\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \; u = x, \; v = \dfrac{y}{x},$

$\left[\dfrac{v^2}{u}\dfrac{\partial f}{\partial v} - v^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0\right]$

b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \; u = x - 2\sqrt{y}, \; v = x + 2\sqrt{y}$

$\left[4\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0\right]$

c) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \; u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \; v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0\right]$

d) $x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \; u = xy, \; v = \dfrac{x}{y}$

$\left[4uv\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2v\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0\right]$

Příklad 4.5. Napište Taylorův polynom stupně n v okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ pro následují funkce:

a) $f(x,y) = x^3+y^3, \; n=2, \; \boldsymbol{x}_0 = [1,0]$ $\quad \left[T_2(x,y) = 1 + 3(x-1) - 3(x-1)^2\right]$

b) $f(x,y) = xy, \; n=2, \; \boldsymbol{x}_0 = [1,1]$ $\quad \left[T_2(x,y) = 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)\right]$

c) $f(x,y) = \ln(xy), \; n=2, \; \boldsymbol{x}_0 = [1,1]$ $\quad \left[T_2(x,y) = (x-1) + (y-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}(y-1)^2\right]$

d) $f(x,y) = e^{x+y} \; n=2, \; \boldsymbol{x}_0 = [0,0]$ $\quad \left[T_2(x,y) = 1 + x + y + \dfrac{1}{2}x^2 + xy + \dfrac{1}{2}y^2\right]$

e) $f(x,y) = e^x\ln(1+y) \; n=4, \; \boldsymbol{x}_0 = [0,0]$ $\quad []$

f) $f(x,y) = e^x\sin y \; n=3, \; \boldsymbol{x}_0 = [0,0]$ $\quad \left[T_3(x,y) = y + xy + \dfrac{1}{2}x^2y - \dfrac{1}{6}y^3\right]$

g) $f(x,y) = x^y \; n=3, \; \boldsymbol{x}_0 = [1,1]$ $\quad []$

h) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y} \; n=3, \; \boldsymbol{x}_0 = [2,1]$ $\quad []$

Kapitola 5

Implicitní funkce

Příklad 5.1. Spočítejte derivace $y'(x)$ funkcí zadaných implicitně v obecném a daném bodě:

a) $xe^{2y} - y\ln x - 1 = 0,\ \boldsymbol{a} = [1, ?],$ $\left[\dfrac{\frac{y}{x} - e^{2y}}{2xe^{2y} - \ln x}\right]$

b) $xe^{2y} - y\ln x - 1 = 0,\ \boldsymbol{a} = [?, 0],$ $[]$

c) $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ \boldsymbol{a} = [2, 0],$ $[]$

d) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0,\ \boldsymbol{a} = [0, ?],$ $\left[-\dfrac{y}{x}\right]$

e) $e^x\cos y + e^y\cos x = 1,\ \boldsymbol{a} = [?, 0],$ $\left[\dfrac{e^y\sin x - e^x\cos y}{e^y\cos x - e^x\sin y}\right]$

f) $xe^x = y^2 + xy,\ \boldsymbol{a} = [?, 1],$ $\left[\dfrac{e^x + xe^x - y}{2y + x}\right]$

g) $e^y + xy - e = 0,\ \boldsymbol{a} = [0, 1],$ $\left[\dfrac{-y}{e^y + x},\ y'(0) = \dfrac{-1}{e}\right]$

h) $\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0,\ \boldsymbol{a} = [0, 1],$ $[]$

i) $x^3 + y^3 - 3xy = 0,\ \boldsymbol{a} = [0, 0],$ $\left[\dfrac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x},\ y'(0) \text{ neexistuje}\right]$

j) $y^3 - 2xy + x^2 = 0,\ \boldsymbol{a} = [1, 1],$ $\left[\dfrac{2y - 2x}{3y^2 - 2x},\ y'(1) = 0\right]$

k) $xy = y^x,\ \boldsymbol{a} = [1, 1],$ $\left[\dfrac{y^x\ln y - y}{x - xy^{x-1}},\ y'(1) \text{ neexistuje}\right]$

l) $xy - \ln y = 0,\ \boldsymbol{a} = [0, 1],$ $\left[\dfrac{y}{x - \frac{1}{y}},\ y'(0) = 1\right]$

Příklad 5.2. Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v obecném bodě pro implicitně zadané funkce:

a) $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\cos xy + z\cos xz}{x\cos xz + y\cos yz},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\cos xy + z\cos yz}{x\cos xz + y\cos yz}\right]$

b) $z = xy\sin zx,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} =,\ \frac{\partial z}{\partial y} =\right]$

c*) $z + e^z = xy + 1,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{ez+1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{ez+1}\right]$

d) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = 5,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+z^2}{1+x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+z^2}{1+y^2}\right]$

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} =,\ \frac{\partial z}{\partial y} =\right]$

f) $z^3 + 3xyz - 1 = 0,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} =,\ \frac{\partial z}{\partial y} =\right]$

g) $x^2 + z^2 - xz + xy^4 - 1 = 0,$ $\left[\frac{\partial z}{\partial x} =,\ \frac{\partial z}{\partial y} =\right]$

Příklad 5.3. Napište rovnici tečny a normály k zadané křivce v zadaném bodě:

a) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1,\ T = [2, 0],$ $[t : y = 0, n : x = 2]$

b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5,\ T = [8, 1],$ $[t : x + 2y = 10,\ n :]$

c) $2x - x^2 - e^y - 2y = 0,\ T = [1, 0],$ $[t : y = 0,\ n : x = 1]$

d) $x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ T = [1, 1],$ $[t : y - 1 = -(x - 1),\ n :]$

e) $x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0,\ T = [1, 1],$ $[t : 6x + 5y - 11 = 0,\ n : 5x - 6y - 1 = 0]$

f) $\arcsin x + xy^2 = 0,\ T = [0, 3],$ $[t : x = 0,\ n : y = 2]$

g) $x^2y + y^2x - xy - 1 = 0,\ T = [1, 1],$ $[t : y = -x + 2,\ n : y = x]$

h*) $\ln(x + y) + 2x + y = 0,\ T = [-1, 2],$ $\left[t : y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1),\ n : 5x - 6y - 1 = 0\right]$

i) $x^2(x + y) = x - y,\ T = [0, 0],$ $[t :,\ n :]$

j) $y^3 - xy - y = 0,\ T = [3, -2],$ $[t :,\ n :]$

k) $x^4 + y^4 - x^3y^3 = 9,\ T = [1, 2],$ $[t :,\ n :]$

Příklad 5.4. Rozhodněte, zda křivka implicitně popsaná rovnicí $F(x, y) = 0$ leží v okolí daného bodu $\boldsymbol{a}$ pod tečnou nebo nad tečnou, je-li

a) $F(x, y) = 2x - x^2 - e^y - 2y = 0,\ \boldsymbol{a} = [1, 0],$ [pod tečnou]

b) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy,\ \boldsymbol{a} = [1, 1],$ [pod tečnou]

c) $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3,\ \boldsymbol{a} = [0, 1],$ [nad tečnou]

Příklad 5.5. Zjistěte, zda v okolí daného bodu $x_0 = a_1$ je funkce $f(x)$ (implicitně popsaná rovnicí $F(x, y) = 0$) rostoucí, klesající, konvexní či konkávní, je-li

a*) $F(x, y) = x^2 - y - e^y = 0,\ \boldsymbol{a} = [1, 0],$ [rostoucí, konvexní]

b*) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1,\ \boldsymbol{a} = [1, 1],$ [rostoucí, konkávní]

c) $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3,\ \boldsymbol{a} = [0, 1],$ [rostoucí, konkávní]

Příklad 5.6. Nalezněte tečnou rovinu k dané ploše v daném bodě:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 14,\ T = [1, -2, 3],$ $[x - 2y + 3z = 14]$

b) $xy + yz + zx = -1,\ T = [?, 2, -1],$ $[x + 3z + 2 = 0]$

c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)+1},\ T = [1, ?, -1],$ $[x + y + z = 1]$

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0,\ T = [1, 0, 1],$ $[x - 2y + z - 2 = 0]$

e*) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0,\ T = [1, 2, -1],$ $[x + 11y + 5z = 18]$

f) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0,\ T = [1, 2, 2],$ $[x + 4y + 6z - 21 = 0]$

g) $xyz^2 - x - y - z = 0,\ T = [1, -1, -1],$ $[x + 11y + 5z - 18 = 0]$

h) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0,\ T = [3, 0, 4],$ $[3x + 4z - 25 = 0]$

i) $\ln(x + y + z - 2) \cdot e^{x+y} = 2x - y - z,\ T = [1, 1, 1],$ $[= 0]$

Kapitola 6

Extrémy funkcí více proměnných

Příklad 6.1. Vyšetřete lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = x(3-x^2) - y^2,$ [lokální maximum v $[1,0]$]

b) $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y),$ [lokální maximum v $[3,2]$]

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27,$ [lokální maximum v $[-3,-3]$]

d) $f(x,y) = xe^{y+x\sin x}$ [nemá extrém]

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ [lokální minimum v $[1,1]$]

f) $f(x,y) = \sqrt{(1-x)(1-y)(x+y-1)}$ [lokální maximum v $[1,0]$]

g) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+y^2),$ [ ]

h*) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 4x$ [nemá extrém]

i) $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2+3y^2-6xy)$ [lokální minimum v $[0,0]$]

j) $f(x,y) = x^3 - 6xy - 6x + 6y + 3y^2$ [lokální minimum v $[2,1]$]

k) $f(x,y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ [nemá extrém]

l) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$ [lokální maximum v $[-4,-2]$]

m) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{2y^2}{x} + 4y$ [lokální minimum v $[1,-1]$]

n) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^2 + 2$ [lokální maximum v $[6,18]$]

o) $f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ [lokální maximum v $[0,0]$]

p) $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$ [lokální maximum v $[1,-1]$]

q) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ [lokální minimum v $[1,2]$]

r) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$ [nemá extrém]

s) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3y - 2$ [lokální minimum v $[-1,2]$]

t*) $f(x,y) = 6xy - x^3 - 8y^3 + 125$ $\left[\text{lokální maximum v } \left[1, \frac{1}{2}\right]\right]$

u) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 4x + 8y - 6$ [nemá extrém]

v) $f(x,y) = 3\ln x + xy^2 - y^3$ [nemá extrém]

w) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 3$ [lokální minimum v $[1,1]$]

x*) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$ [lokální minimum v $[1,4]$]

y) $f(x,y) = 6xy + x - 3y - 2x^2 - 5y^2 + 7$ $\left[\text{lokální maximum v } \left[-2, -\frac{3}{2}\right]\right]$

z) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 6y + 5$ [nemá extrém]

Příklad 6.2. Vyšetřete lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$, [nemá extrém]

b) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$, [lokální minimum v $[-2,0]$]

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - xy$, [lokální maximum v $[-1,-1]$]

d) $f(x,y) = 2x^3y - x^2y^2 + 32x + 5$ [nemá extrém]

e) $f(x,y) = 2x^3 + 2xy^2 - 24x + 5$ [lok. min. v $[2,0]$, lok. max. v $[-2,0]$]

f) $f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 12$ [lokální minimum v $[2,4]$]

g) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $\left[\text{lokální minimum v } \left[1, \dfrac{1}{2}\right]\right]$

h) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ [lokální minimum v $[1,4]$]

i) $f(x,y) = 2xy - 2x - 4y$ [nemá extrém]

j) $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ [lokální maximum v $[4,4]$]

k) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 15$ [lokální minimum v $[6,6]$]

l) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ [lokální minimum v $[-4,1]$]

m) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$ [nemá extrém]

n) $f(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$ []

o) $f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3$ [lok. min. v $[1,1]$, lok. max. v $[1,-1]$]

p) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ $\left[\text{lok. min. v } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{ lok. min. v } [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]\right]$

q) $f(x,y) = x^2y(4 - x + y)$ []

r) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$ [lokální maximum v $[2,2]$]

s) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ []

t) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ []

u) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ [lokální minimum v $[1,0]$]

v) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ [lokální minimum v $[5,2]$]

w) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ [lokální minimum v $[0,1]$]

x) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$ []

Příklad 6.3. Vyšetřete lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$, []

b) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, []

c) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$, []

d) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$, [nemá extrém]

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, [lokální minimum v $[-1,-2,3]$]

f) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$, [lokální minimum v $[24,-144,-1]$]

Příklad 6.4. Nalezněte vázané extrémy funkce f vzhledem k množině M, je-li:

a) $f(x,y)=\sqrt{3}x-y+2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2+2x+y^2=0\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[\frac{\sqrt{3}-2}{2},-\frac{1}{2}\right], \text{ lokální minimum v } \left[-\frac{\sqrt{3}+2}{2},\frac{1}{2}\right]\right]$

b) $f(x,y)=x^2-y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : y+e^{-x^2}-1=0\}$,

[lokální minimum v $[0,0]$]

c) $f(x,y)=e^{xy},\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x+y=1\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right]$

d) $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x+y=2,\ x\neq 0,\ y\neq 0\}$,

[lokální minimum v $[1,1]$]

e) $f(x,y)=xy,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2+y^2=2\}$,

[lokální maximum v $[-1,-1],[1,1]$ lokální minimum v $[-1,1],[1,-1]$]

f*) $f(x,y)=xy,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x+y=1\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right]$

g) $f(x,y)=x+2y-1,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2+y^2=1\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right], \text{ lokální minimum v } \left[-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]\right]$

h*) $f(x,y)=6-4x-3y,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2+y^2=1\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right], \text{ lokální minimum v } \left[\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right]\right]$

i) $f(x,y)=xy-x+y-1,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x+y=1\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\right]$

j) $f(x,y)=x^2+2y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2-2x+2y^2+4y=0\}$,

[lokální maximum v $[2,-2]$, lokální minimum v $[0,0]$]

k) $f(x,y)=x+y,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1=0\}$,

$\left[\text{lokální maximum v } \left[-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right], \text{ lokální minimum v } \left[\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\right]$

l) $f(x,y)=x^2+y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x+y=1\}$,

[lokální maximum v , lokální minimum v]

m) $f(x,y)=xy,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2 : x^2+y^2=2\}$,

[lokální maximum v , lokální minimum v]

Příklad 6.5. Najděte absolutní extrémy funkce f na předepsané množině M, je-li:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2+y^2\le 9\}$,
$\big[$absolutní maximum na množině $x^2+y^2=9$, absolutní minimum v $[0,0]\big]$

b) $f(x,y)=x-2y-3,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: 0\le x,\ y\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$,
[absolutní maximum v $[1,0]$, absolutní minimum v $[0,1]$]

c) $f(x,y)=x^2-3y^2-x+18y-4,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: 0\le x\le y\le 4\}$,
[absolutní maximum v $[4,4]$, absolutní minimum v $[0,0]$]

d) $f(x,y)=(x-y^2)(x-1)^{\frac{2}{3}},\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: y^2\le x\le 2\}$,
[absolutní maximum v $[2,0]$, absolutní minimum na hranici ∂M]

e) $f(x,y)=x^2+2xy-3y^2+y,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: 0\le x,\ y\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$,
$\left[\text{absolutní maximum v } \left[\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right], \text{ absolutní minimum v } [0,1]\right]$

f) $f(x,y)=x^2-xy+y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: |x|+|y|\le 1\}$,
[absolutní maximum v $[\pm1,0]$, $[0,\pm1]$, absolutní minimum v $[0,0]$]

g*) $f(x,y)=x^2-y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2+y^2\le 4\}$,
[absolutní maximum v $[\pm2,0]$, absolutní minimum v $[0,\pm2]$]

h) $f(x,y)=x^2+2xy+4x+8y,\ M=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle$,
[absolutní maximum v $[1,2]$, absolutní minimum v $[0,0]$]

i) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\ M=\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$,
$\left[\text{absolutní maximum v } \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right], \text{ absolutní minimum v } [0,0]\right]$

j) $f(x,y)=3xy,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2+y^2\le 2\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

k) $f(x,y)=x^2-y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2+y^2\le 1\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

l) $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

m) $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2+y^2\le 25\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

n) $f(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x^2\le y\le 4\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

o) $f(x,y)=x^2y(4-x-y),\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 6\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

p) $f(x,y)=x-2y-3,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

q) $f(x,y)=x^2-xy+y^2,\ M=\{[x,y]\in I\!R^2: |x|+|y|\le 1\}$,
[absolutní maximum v , absolutní minimum v]

Kapitola 7

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 7.1. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice (pomocí separace proměnných) a řešení Cauchyho úlohy:

a) $y' = y,\ y(0) = -1,$ $\qquad [y = Ce^x,\ C \in \mathbb{R};\ C = -1]$

b) $y' = \dfrac{x}{y},\ y(0) = 1,$ $\qquad \left[|y| = \sqrt{x^2 + C},\ C \in \mathbb{R};\ C = 1\right]$

c) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = 0,\ y(1) = 1,$ $\qquad \left[y = \dfrac{Cx}{x+1},\ C \in \mathbb{R};\ C = 2\right]$

d) $x^2y' + y = 1,\ y(1) = 0,$ $\qquad \left[y = 1 - Ce^{\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R};\ C = \dfrac{1}{e}\right]$

e*) $2y - x^3y' = 0,\ y(1) = -1,$ $\qquad \left[y = Ce^{-\frac{1}{x^2}},\ C \in \mathbb{R};\ C = -e\right]$

f) $y' = 2xy,\ y(1) = 1,$ $\qquad \left[y = Ce^{x^2},\ C \in \mathbb{R};\ C = \dfrac{1}{e}\right]$

g) $y' = \dfrac{y}{x},\ y(1) = 1,$ $\qquad [y = Cx,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

h) $y' = y\operatorname{cotg} x,\ y(\pi/2) = 0,$ $\qquad [y = C\sin x,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

i) $y' = 2\sqrt{y},\ y(0) = -1,$ $\qquad [y = (x + C)^2,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

j) $y' + xy = x,\ y(1) = 1,$ $\qquad \left[y = 1 - Ce^{-x^2/2},\ C \in \mathbb{R};\ C =\right]$

k) $y' = \dfrac{x-2}{y^2},\ y(0) = 1,$ $\qquad \left[y = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}(x-2)^2 + C},\ C \in \mathbb{R};\ C =\right]$

l) $y' = \dfrac{y-1}{x(x-1)},\ y(0) = -1,$ $\qquad \left[y = 1 + C\dfrac{x-1}{x},\ C \in \mathbb{R};\ C =\right]$

m) $y' = \dfrac{2x-1}{1+2y},\ y(1) = -1,$ $\qquad \left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = C,\ C \in \mathbb{R};\ C =\right]$

n) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0,\ y(0) = -1,$ $\qquad \left[C = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},\ C \in \mathbb{R};\ C =\right]$

o) $yy' + xy^2 = x,\ y(1) = 0,$ $\qquad [y =,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

p*) $y' = \dfrac{y^2}{x^2},\ y(1) = 1/2,$ $\qquad \left[y = \dfrac{x}{1 - Cx},\ C \in \mathbb{R};\ C = -1\right]$

q) $y' = -\dfrac{(1+y^2)x}{1+x^2},\ y(0) = 1,$ $\qquad \left[\operatorname{arccotg} y = \ln\sqrt{1+x^2} + C,\ C \in \mathbb{R};\ C = \dfrac{\pi}{4}\right]$

r) $y' = \sqrt[5]{y^2},\ y(0) = -1,$ $\qquad \left[y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{3(x+c)}{5}\right)^5},\ C \in \mathbb{R};\ C = -\dfrac{3}{5}\right]$

s) $y' = \dfrac{\cos x}{e^y},\ y(0) = -1,$ $\qquad \left[y = \ln\left(\sin(x) + C\right),\ C \in \mathbb{R};\ C = \dfrac{1}{e}\right]$

Příklad 7.2. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice (pomocí separace proměnných) a řešení Cauchyho úlohy:

a) $2(x^2+x-2)y' = 3(y^2-1),\ y(0) = -1,$ $\quad [y =,\ C \in I\!R;\ C =]$

b) $y' = \dfrac{xy}{x^2-1},\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = C\sqrt{|x^2-1|},\ C \in I\!R;\ C = -1\right]$

c) $y' = -y^2 \cos x,\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = \dfrac{1}{\sin x + C},\ C \in I\!R;\ y = 0,\ C = -1\right]$

d*) $y' = \dfrac{y^2-y}{x},\ y(1) = -1,$ $\quad \left[y = \dfrac{1}{1-Cx},\ C \in I\!R;\ y = 0,\ C = 2\right]$

e) $xy' = -y,\ y(4) = -3,$ $\quad \left[\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C,\ C \in I\!R;\ C = 25,\ y(x) = -\sqrt{25-x^2}\right]$

f) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 2\mathrm{tg}\,x,\ y(0) = -1,$ $\quad [y = 2 - C\cos x,\ C \in I\!R;\ C =]$

g) $y' = e^{x+y},\ y(0) = 1,$ $\quad [y = -\ln(C - e^x),\ C \in I\!R;\ C =]$

h) $y' = \dfrac{xy^2+x}{x^2y-y},\ y(0) = -1,$ $\quad [y^2+1 = C(x^2-1),\ C \in I\!R;\ C =]$

h) $y' = y - y^2,\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = \dfrac{e^x}{e^x - C},\ C \in I\!R;\ y = 0,\ C =\right]$

i) $y'\sin x + y\cos x = 0,\ y(\pi/2) = 0,$ $\quad \left[y = \dfrac{C}{\sin x},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

j) $y\cos x - y'\sin x = 0,\ y(\pi/2) = 0,$ $\quad [y =,\ C \in I\!R;\ C =]$

k) $y' = \dfrac{1-y^2}{2xy},\ y(0) = -1,$ $\quad [y =,\ C \in I\!R;\ C =]$

l) $y' = -y^2x,\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = \dfrac{2}{x^2+C},\ C \in I\!R;\ C = -2\right]$

Příklad 7.3. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice (s homogenní funkcí) a řešení Cauchyho úlohy:

a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y},\ y(0) = -1,$ $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C,\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

b) $y' = \dfrac{y^2}{x(y-x)},\ y(0) = 1,$ $\left[Cy = e^{y/x},\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2} = 0,\ y(0) = 1,$ $\left[x^2 + y^2 = Cy,\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

d) $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2},\ y(1) = 0,$ $\left[x^2 = C^2 + 2Cy,\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

e) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy},\ y(0) = -1,$ $\left[y = x\sqrt{2\ln x + 2C},\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

f) $y' = \dfrac{2x-y}{x-3y},\ y(1) = 1,$ $\left[2x^2 - 2xy + 3y^2 = e^{-2C},\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

g) $y' = \dfrac{x+y}{x},\ y(1) = 1,$ $[y = x\ln|x| + Cx,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

h) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2,\ y(1) = -1,$ $[y = ,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

i) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y},\ y(1) = 1,$ $[y = ,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

j) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x},\ y(1) = 1,$ $[,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

k) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x},\ y(1) = -1,$ $[,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

l) $y^2 + x^2y' = xyy',\ y(1) = 0,$ $[,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

m) $xy' - y = \sqrt{y^2+x^2},\ y(1) = -1,$ $[,\ C \in \mathbb{R};\ C =]$

n) $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy},\ y(1) = 1,$ $\left[y^2 + x^2 = Cx,\ C \in \mathbb{R} - \{0\};\ C = \right]$

o*) $y' = -\dfrac{y}{x+y},\ y(1) = 0,$ $\left[x^2 + 2xy = C,\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

p) $x^2y' = y^2 - xy + x^2,\ y(1) = 1,$ $\left[y = x\left(1 - \dfrac{1}{\ln|x| + C}\right),\ C \in \mathbb{R};\ C = \right]$

Příklad 7.4. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu a řešení Cauchyho úlohy:

a) $y' = y\dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x,\ y(\pi/2) = 1,$ $\quad [y = (2x + C)\sin x,\ C \in I\!R;\ C =]$

b*) $y' + 3y = e^{2x},\ y(0) = 1,$ $\quad \left[y = Ce^{-3x} + \dfrac{e^{2x}}{5},\ C \in I\!R;\ C = \dfrac{4}{5}\right]$

c) $y' + y = \cos x,\ y(0) = 1,$ $\quad \left[y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x),\ C \in I\!R;\ C =\right]$

d) $2y + (y^2 - 6x)y' = 0,\ y(1) = 0,$ $\quad [y^2 - 2x = Cy^3,\ C \in I\!R;\ C =]$

e) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = \dfrac{x}{x+1}(C + x + \ln|x|),\ C \in I\!R;\ C =\right]$

f) $x^2y' + 3 - 2xy = 0,\ y(1) = 1,$ $\quad \left[y = Cx^2 + \dfrac{1}{x},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

g) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)},\ y(1) = 1,$ $\quad [(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2,\ C \in I\!R;\ C =]$

h) $x^3y' = y(y^2 + x^2),\ y(1) = -1,$ $\quad \left[x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

i) $\dfrac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x},\ y(1) = 0,$ $\quad \left[\sin\dfrac{y}{x} = Cx,\ C \in I\!R;\ C =\right]$

j*) $y' + 2y\operatorname{tg} x = 2\sin x,\ y(\pi) = 1,$ $\quad [y = C\cos^2 x + 2\cos x,\ C \in I\!R;\ C = 3]$

k) $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x,\ y(0) = 2,$ $\quad \left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = 3e^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x - 1\right]$

l) $y' = \dfrac{3y}{x} + x^4\cos x,\ y(2\pi) = 0,$ $\quad [y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = x^3(x\sin x + \cos x - 1)]$

m) $y' = \dfrac{-4x}{x^2+1}y + \dfrac{1}{x^2+1},\ y(1) = 1,$ $\quad \left[\left(\dfrac{x^3}{3} + x + C\right)\dfrac{1}{(x^2+1)^2},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

n) $y' + 2y = 3xe^{-x},\ y(0) = -1,$ $\quad [Ce^{-2x} + (3x - 3)e^{-x},\ C \in I\!R;\ C =]$

o) $y' - y = xe^x\cos x,\ y(0) = 1,$ $\quad [y = Ce^x + e^x\cos x + xe^x\sin x,\ C \in I\!R;\ C =]$

p) $y'\cos x + y\sin x = 1,\ y(0) = 1,$ $\quad [y = C\cos x + \sin x,\ C \in I\!R;\ C = 1]$

q*) $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0) = 1,$ $\quad \left[y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right),\ C \in I\!R;\ C = 1\right]$

r) $y' = y\operatorname{tg} x = 1 - x\operatorname{tg} x,\ y(0) = 1,$ $\quad \left[y = \dfrac{C}{\cos x} + x,\ C \in I\!R;\ C =\right]$

s) $xy' + y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2},\ y(1) = \pi/4,$ $\quad \left[y = \dfrac{C}{x} + \operatorname{arctg} x,\ C \in I\!R;\ C = 0\right]$

t) $y' - \dfrac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1,\ y(1) = 1,$ $\quad [y = (x + C)(x^2 + 1),\ C \in I\!R;\ C =]$

u*) $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3,\ y(1) = 0,$ $\quad [y = x^4 + Cx^2,\ C \in I\!R;\ C = -1]$

v) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = e^{-x^2}(x^2 + C),\ C \in I\!R;\ C =\right]$

w) $y' - \dfrac{3}{x}y - \dfrac{x}{2} = 0,\ y(-2) = -6,$ $\quad \left[y = \dfrac{-x^2 + x^3}{2},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

x) $y' - y = \dfrac{e^x}{x},\ y(1) = -e,$ $\quad [y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = e^x(\ln x - 1)]$

y) $y' + 3y = x,\ y(0) = -1/9,$ $\quad \left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9}\right]$

z) $y' + x^2y = x^2,\ y(0) = -1,$ $\quad \left[y = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}},\ C \in I\!R;\ C = -1\right]$

Příklad 7.5. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu a řešení Cauchyho úlohy:

a) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{x},\ y(-1) = 1/4,$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = \frac{x^2 + 2\ln(-x)}{2(x^2+1)}\right]$

b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x},\ y(0) = 1,$ $[y = \ln x + Cx,\ C \in I\!R;\ C =]$

c) $y' = \frac{2y}{x-1},\ y(0) = 1,$ $[y = C(x-1)^2,\ C \in I\!R;\ C =]$

d) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},\ y(\pi) = 3/\pi,$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = \frac{1}{x}(2 - \cos x)\right]$

e) $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0,\ y(-2) = 1,$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = \frac{4 - 3x^4 - 4x^3}{12(x+1)}\right]$

f) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2,\ y(1) = 1,$ $[y = (1+x^2)(x+C),\ C \in I\!R;\ C =]$

g) $y' = y\,\mathrm{tg}\,x + 2\sin x,\ y(\pi) = 1,$ $[,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = -\cos x]$

h) $y' - \sin x = 3x^2,\ y(1) = -1,$ $[y = x^3 - \cos x + C,\ C \in I\!R;\ C =]$

i) $y' = x - y + 1,\ y(1) = -1,$ $[y = x + Ce^{-x},\ C \in I\!R;\ C =]$

j) $y' + \frac{x+1}{x}y = 2e^{-x},\ y(1) = 2/e,$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = e^{-x}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$

k) $y' + \frac{2y}{x} = e^{-x},\ y(1) = 2,$ $\left[y = -e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + \frac{C}{x^2},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

l) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{3x}{1-x^2},\ y(2) = 3 + \sqrt{3},$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = 3 + \sqrt{x^2-1}\right]$

m) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x,\ y(0) = 0,$ $\left[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ y = x^2 - 1 + \sqrt{1-x^2}\right]$

n) $y' + y\cos x = \frac{\sin(2x)}{2},\ y(0) = -1,$ $[y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x},\ C \in I\!R;\ C =]$

o) $y' = \frac{2y}{2x+1} + \frac{4x}{2x+1},\ y(-1) = 2,$ $[y =,\ C \in I\!R;\ C =,\ 1 + (2x+1)(\ln(-2x-1) - 1)]$

p) $2y' + y = 3x^2,\ y(0) = 1,$ $[y = 3x^2 - 12x + 24 + Ce^{-\frac{x}{2}}2,\ C \in I\!R;\ C =]$

q) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3,\ y(1) = 1,$ $[y = x^4 + Cx^2,\ C \in I\!R;\ C =]$

r) $y' = \frac{y}{x} - 1,\ y(1) = -1,$ $[y = -x\ln|x| + Cx,\ C \in I\!R;\ C =]$

s) $xy' = y + x^2,\ y(1) = 0,$ $[y = x^2 + Cx,\ C \in I\!R;\ C = 0]$

t) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},\ y(1) = 1,$ $\left[y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{C}{2x^2},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

u) $y'\cos x - y\sin x = \sin(2x),\ y(0) = 1,$ $\left[y = -\frac{\cos(2x)}{2\cos x} + \frac{C}{\cos x},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

v*) $xy' + y = \ln x + 1,\ y(1) = 0,$ $\left[y = \ln x + \frac{C}{x},\ C \in I\!R;\ C = 0\right]$

w) $(2x+1)y' + y = x,\ y(0) = 1,$ $\left[y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{C}{\sqrt{|2x+1|}},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

x) $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x},\ y(1) = 1,$ $\left[y = x^2e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x},\ C \in I\!R;\ C =\right]$

Příklad 7.6. Určete ortogonální trajektorie k soustavě křivek:

a*) $y - Cx = 0,$ $\quad [x^2 + y^2 = r^2,\ r \in \mathbb{R}]$

b) $y - Ce^{-x} = 0,$ $\quad [y = \pm\sqrt{2x + r},\ r \in \mathbb{R}]$

c*) $y - Cx^2 = 0,$ $\quad [x^2 + 2y^2 = r^2,\ r \in \mathbb{R}]$

d) $y - C = 0,$ $\quad [,\ r \in \mathbb{R}]$

e) $y - Cx^3 = 0,$ $\quad [,\ r \in \mathbb{R}]$

Příklad 7.7. Řešte exaktní diferenciální rovnice:

a*) $(3x^2 + 2y^2) + (4xy + 2)y' = 0,$ $\quad [x^3 + 2xy^2 + 2y = C,\ C \in \mathbb{R}]$

b) $yx^{y-1} + x^y \ln(x) y' = 0,$ $\quad \left[y = \dfrac{C}{\ln x},\ C \in \mathbb{R}\right]$

c) $(x^2 - y^2) + (y^3 - 2xy)y' = 0,$ $\quad [4x^3 - 12xy^2 + 3y^4 = 12C,\ C \in \mathbb{R}]$

d) $2xyy' + y^2 = 0,$ $\quad [xy^2 = C,\ C \in \mathbb{R}]$

e) $(x + 2y)y' + y + 3x^2 = 0,$ $\quad [xy + y^2 + x^3 = C,\ C \in \mathbb{R}]$

f*) $3xy^2y' + 2x + y^3 = 0,$ $\quad [xy^3 + x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}]$

Příklad 7.8. Nalezněte obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty:

a) $y'' - 9y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

b) $y'' - 8y' + 16y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ $\quad [y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

d) $y'' + 3y' = 0,$ $\quad [y = C_1 + C_2e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

e) $y'' - 6y' + 8y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

f) $y'' + y' + 2y = 0,$ $\quad \left[y = C_1e^{-x/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right) + C_2e^{-x/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

g) $y'' + 25y = 0,$ $\quad [y = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

h*) $y'' + 4y' + 4y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

i) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ $\quad [y = C_1e^x + C_2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

j) $y'' - 6y' + 13y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{3x} \cos(2x) + C_2e^{3x} \sin(2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

k*) $y'' + 5y' + 6y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

l) $4y'' - 8y' + 3y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{3x/2} + C_2e^{x/2},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

m) $y'' + y' + y = 0,$ $\quad \left[y = C_1e^{-x/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_2e^{-x/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right]$

n) $y''' - 4y' = 0,$ $\quad [y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

o) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{2x} + C_2 \cos(3x) + C_3 \sin(3x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

p) $y''' + 8y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{-2x} + C_2e^x \cos(\sqrt{3}x) + C_3e^x \sin(\sqrt{3}x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

q) $y''' - 13y' - 12y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

r) $y''' + y'' = 0,$ $\quad [y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

s) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0,$ $\quad [y = C_1e^x + C_2e^{2x} \cos(3x) + C_3e^{2x} \sin(3x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}]$

t) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0,$ $\quad [y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x),\ C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}]$

u) $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0,$ $\quad \big[y = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) + C_3x \cos(\sqrt{3}x)$

$+C_4x \sin(\sqrt{3}x),\ C_1, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}\big]$

Příklad 7.9. Nalezněte partikulární řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty vyhovující daným počátečním podmínkám:

a) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$ $\quad [y = e^x]$

b) $y'' + y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad [y = \sin x]$

c) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 5,$ $\quad \left[y = 2e^{3x} - xe^{3x}\right]$

d) $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 5,$ $\quad \left[y = e^{2x} + e^{3x}\right]$

e) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 13$ $\quad \left[y = -3e^x + 3e^{2x} + e^{-2x}\right]$

Příklad 7.10. Nalezněte obecné řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty metodou variace konstant:

a*) $y'' - y = \frac{x}{e^x},$ $\quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)\right]$

b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos(2x)},$ $\quad \left[y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{4}\ln|\cos(2x)|\cdot\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x)\right]$

c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1},$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{4}{5}e^{-x}(x+1)^{5/2}\right]$

d) $y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{x^2e^{2x}},$ $\quad \left[y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} - e^{-2x}(\ln|x| - 1)\right]$

Příklad 7.11. Nalezněte obecné řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty metodou odhadu pro speciální pravou stranu:

a) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x},$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}\right]$

b) $y'' - 2y' + 5y = \cos x,$ $\quad \left[y = C_1e^x\cos(2x) + C_2e^x\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x\right]$

c) $y''' + y'' = x,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]$

d) $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x,$ $\quad \left[y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x + \frac{1}{2}xe^x\sin x\right]$

e) $y'' - y' = 3x^2e^x,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2e^x + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x)\right]$

f) $y'' - y' = -4x,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2e^x + 2x^2 + 4x\right]$

g) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x,$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x\right]$

h) $y'' + 2y' + y = x^2,$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2 - 4x + 6\right]$

i) $y'' - y' - 2y = x^2 + x,$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right]$

j) $y'' - 4y' = 8x + 4,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2e^{4x} - x^2 - \frac{3}{2}x\right]$

k) $y'' - 4y = 8e^{2x},$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2xe^{2x}\right]$

l) $y'' - 4y = 4x^2 + 2,$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - x^2 - 1\right]$

m) $y'' = e{-}2x,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + \frac{e^{-2x}}{4}\right]$

n) $y'' = \sin x,$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x - \sin x\right]$

Příklad 7.12. Nalezněte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = b(x)$$

metodou odhadu pro speciální pravou stranu $b(x)$, je-li

a) $b(x) = 3e^{2x}$, $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}\right]$
b) $b(x) = 4x$, $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x + 1\right]$
c) $b(x) = e^x$, $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^x\right]$
d) $b(x) = 6xe^{2x}$, $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^3e^{2x}\right]$
e) $b(x) = 8\sin(2x)$, $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \cos(2x)\right]$
f) $b(x) = 4x^2 + 2$, []
g) $b(x) = xe^x$, []

Příklad 7.13. Nalezněte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$y'' + 9y = b(x)$$

metodou odhadu pro speciální pravou stranu $b(x)$, je-li

a) $b(x) = 3x^2 + 6$, $\left[y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{x^2}{3} - \frac{16}{27}\right]$
b) $b(x) = 4(x+1)\sin x$, $\left[y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x\right]$
c) $b(x) = 9xe^{3x}$, $\left[y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right)e^{3x}\right]$
d) $b(x) = \frac{85}{3}3e^{-x}\cos x$, $\left[y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + e^{-x}\left(3\cos x - \frac{2}{3}\sin x\right)\right]$
e) $b(x) = 6\sin(3x) + 3\cos(3x)$, $\left[y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{1}{2}x\sin(3x) - x\cos(3x)\right]$

Příklad 7.14. Nalezněte partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice vázané počátečními podmínkami

$$y'' + y = b(x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Použijte metodou odhadu pro speciální pravou stranu $b(x)$, je-li

a) $b(x) = x$, $[y = -2\sin x + \cos x + x]$
b) $b(x) = \sin x$, $[y =]$
c) $b(x) = 3\sin(2x)$, $[y =]$
d) $b(x) = 3\cos(2x)$, $[y =]$
e) $b(x) = x + 3$, $[y = -2\sin x - 2\cos x + x + 3]$

Příklad 7.15. Nalezněte partikulární řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic vázané příslušnými počátečními podmínkami.

a) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ $[y =]$
b) $y'' + 3y' + 2y = (6x-1)e^x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$ $\left[y = e^{-x} - e^{-2x} + (x-1)e^x\right]$
c) $y'' + 2y' + y = 2\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $[y =]$
d) $y'' - 2y' - 3y = 15\sin(3x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $[y =]$
e) $y'' - 5y' + 4y = e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ $\left[y = \frac{e^x}{9} - \frac{e^{4x}}{9} + \frac{xe^{4x}}{3}\right]$

Kapitola 8

Řady

Příklad 8.1. Rozhodněte o konvergenci či divergenci číselné řady:

a*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ [konverguje]

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{(n+7)!}$ [konverguje]

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ [diverguje]

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100^n}{n!}$ [konverguje]

e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje]

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ [konverguje]

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$ [diverguje]

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+7)!}{7^n n!}$ [konverguje]

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$ [konverguje]

j*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}$ [diverguje]

k*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ [konverguje]

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{2010}}$ [diverguje]

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ [konverguje]

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$ [diverguje]

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$ [konverguje]

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n}\right)$ [konverguje]

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{e^n}$ [konverguje]

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$ [konverguje]

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n-1)^n}$ [konverguje]

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje]

u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3^n}}$ [konverguje]

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^2}$ [diverguje]

w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ [konverguje]

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$ [konverguje]

y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$ [konverguje]

z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ [konverguje]

Příklad 8.2. Rozhodněte o absolutní či relativní konvergenci nebo divergenci číselné řady:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ [konv. relativně]

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2n}$ [diverguje]

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$ [konv. absolutně]

d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$ [konv. relativně]

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ [diverguje]

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n}$ [konv. absolutně]

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ [konv. absolutně]

h*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ [konv. absolutně]

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ [konv. relativně]

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n+2)}$ [konv. relativně]

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{(-3)^n}$ [konv. relativně]

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\sqrt{n}+(-1)^n)^3}$ [konv. absolutně]

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ [diverguje]

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ [konv. relativně]

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ [konv. absolutně]

q*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ [konv. absolutně]

r*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ [konv. relativně]

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ [konv. absolutně]

t*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ [konv. relativně]

u) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ [konv. absolutně]

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ [konv. relativně]

Příklad 8.3. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninných řad:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n8^n}$ $\quad [R = 8,\ I^* = \langle -7, 9)]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\quad [R = 1,\ I^* =]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^k}{k^2 2^k}$ $\quad \left[R = \frac{2}{3},\ I^* = \left\langle -1, \frac{1}{3} \right\rangle\right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n8^n}$ $\quad [R = 2,\ I^* = \langle -1, 3)]$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x+1)^n$ $\quad [R = 0,\ I^* = \{-1\}]$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} x^n$ $\quad [R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$ $\quad [R = 3,\ I^* = \langle -3, 3)]$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2\sqrt{n}}$ $\quad [R = 1,\ I^* = \langle 0, 2\rangle]$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+2)(x+1)^n$ $\quad [R = 1,\ I^* = (-2, 0)]$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{n!}$ $\quad [R = +\infty,\ I^* = (-\infty, +\infty)]$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n}(x-3)^n$ $\quad [R = 0,\ I^* = \{3\}]$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{n(n+3)}$ $\quad [R = 1,\ I^* = \langle -3, -1\rangle]$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ $\quad [R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{2n-1}$ $\quad \left[R = \frac{1}{2},\ I^* = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)\right]$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$ $\quad [R = 8,\ I^* = \langle -9, -7\rangle]$